

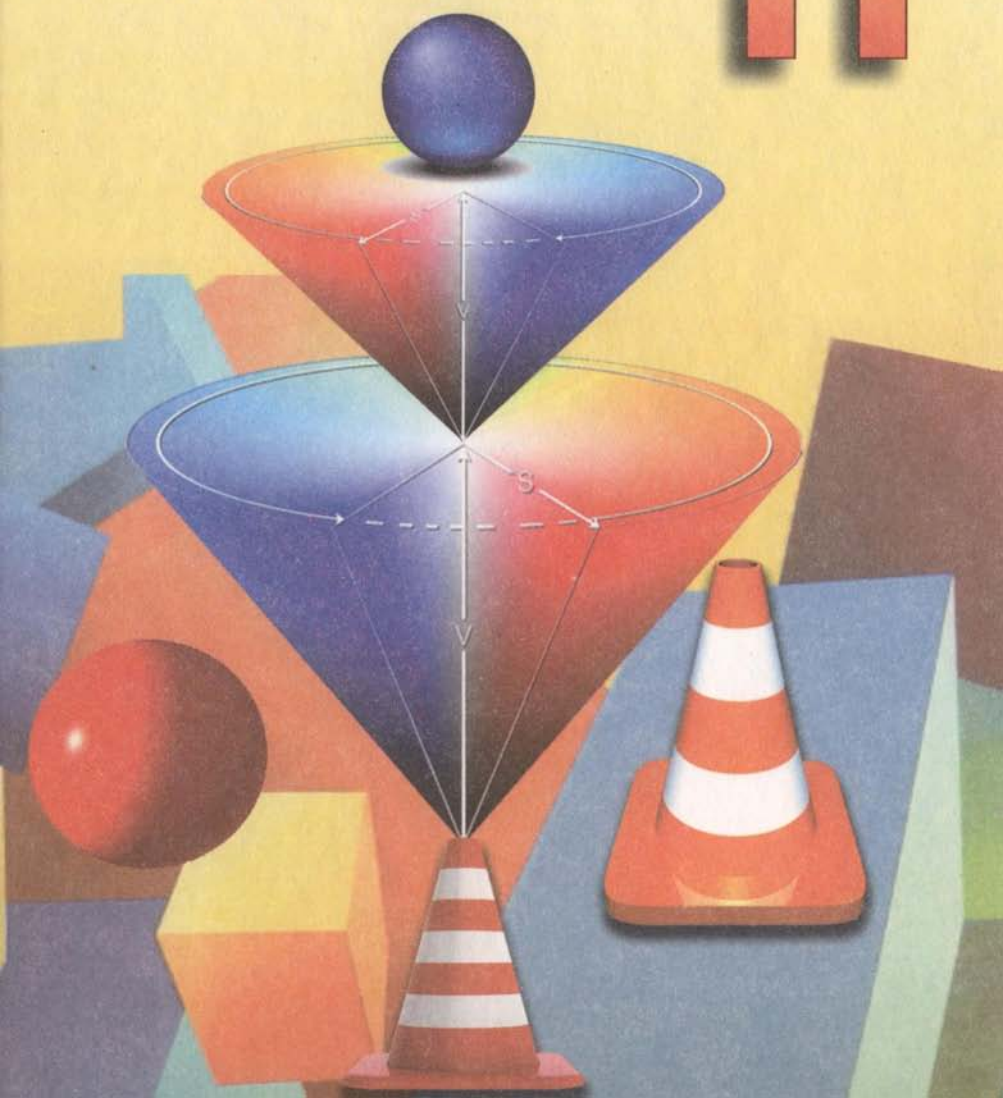


Г.П. Бевз, В.Г. Бевз,
Н.Г. Владимирова, В.Н. Владимиров

Геометрия

Академический уровень,
профильный уровень

11

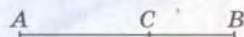


Координаты

Число измерений	Координаты точек	Координаты середины отрезка AB	Длина отрезка AB
1	$A(x_1), B(x_1)$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$ x_2 - x_1 $ или $\sqrt{(x_2 - x_1)^2}$
2	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
3	$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Если $AC : CB = m : n$, то координаты C :

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}; y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}; z = \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}$$



Векторы

Если $O(0; 0; 0)$ и $A(x; y; z)$, то $\vec{OA} = (x; y; z)$.

Если $KP \parallel OA$ и $|KP| = |OA|$, то $\vec{KP} = \vec{OA}$.

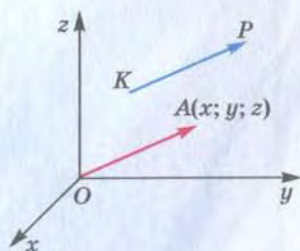
Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),$$

$$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$



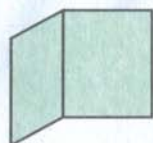
$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{AC} \\ \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} &= \vec{AD} \\ \vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{KP} &= \vec{AP} \end{aligned}$$

Многогранники

Углы многогранника



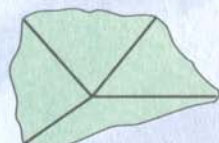
плоский



двугранный



трехгранный



многогранный

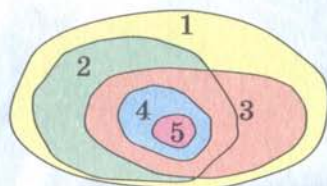
Многогранники

Призмы

Пирамиды

Усеченные пирамиды

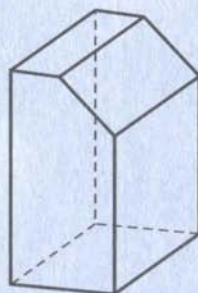
Другие



- 1 – призмы
- 2 – выпуклые призмы
- 3 – прямые
- 4 – правильные
- 5 – кубы

Теорема Эйлера для выпуклых многогранников

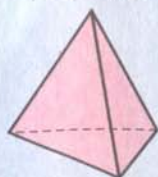
$V + \Gamma - P = 2$,
где V , Γ , P – количество вершин, граней, ребер.



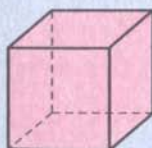
$V = 10$
 $\Gamma = 7$
 $P = 15$

Правильные многогранники

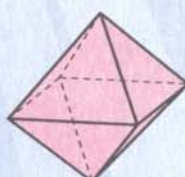
тетраэдр



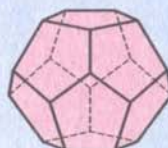
куб



октаэдр



додекаэдр



икосаэдр



Г.П. Бевз
В.Г. Бевз
Н.Г. Владимиро́ва
В.Н. Владимиров

Геометрия

11

Учебник для 11 класса
общеобразовательных
учебных заведений

**Академический уровень,
профильный уровень**

*Рекомендовано
Министерством образования
и науки Украины*

Перевод с украинского

КИЕВ
«ГЕНЕЗА»
2011

ББК 22.151я721
Г36

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(приказ МОН Украины № 235 от 16.03.2011 г.)*

**Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена**

Переведено с издания:

Геометрія : Підручн. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К. : Генеза, 2011. – 336 с. : іл.

Научную экспертизу проводил
Институт математики НАН Украины.

Психолого-педагогическую экспертизу проводил
Институт педагогики НАПН Украины.

Геометрія : Учебн. для 11 кл. общеобразоват. учебн. заведений : академ. уровень, проф. уровень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владимірова, В.Н. Владиміров; пер. с укр. – К. : Генеза, 2011. – 336 с. : ил. – Библиогр. : с. 310.

ISBN 978-966-11-0090-8.

Учебник предназначен для завершения изучения геометрии в средней школе. Он соответствует академическому и профильному уровням. Учебник состоит из разделов: «Координаты, геометрические преобразования и векторы в пространстве», «Многогранные углы. Многогранники», «Тела вращения», «Объемы и площади поверхностей геометрических тел» и «Приложения».

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-11-0090-8 (рус.)
ISBN 978-966-11-0064-9 (укр.)

© Бевз Г.П., Бевз В.Г.,
Владимірова Н.Г.,
Владиміров В.Н., 2011
© Издательство «Генеза»,
оригинал-макет, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

В ваших руках – учебник геометрии для 11-го класса. Ему присущи две особенности. Во-первых, это учебник, по которому вы будете завершать изучение геометрии в средней школе. Он содержит вторую часть стереометрии и материалы для повторения всей геометрии. Завершая изучение геометрии, желательно представить ее всю и понять, какое место занимает в ней материал 11-го класса. В таблице этот материал выделен цветом.

ГЕОМЕТРИЯ

Планиметрия

Прямые, отрезки, углы, окружности, круги
Треугольники, четырехугольники, многоугольники
Длины, площади, меры углов и дуг
Движение и преобразование подобия
Координаты и векторы на плоскости

Стереометрия

Прямые и плоскости в пространстве

Координаты, геометрические преобразования
и векторы в пространстве
Двугранные и многогранные углы
Многогранники, тела вращения
Площади поверхностей и объемы геометрических тел

Вторая особенность учебника в том, что он двухуровневый, соответствует академическому и профильному уровням. Учебник содержит весь теоретический материал, предусмотренный программой академического уровня, и достаточное количество соответствующих упражнений. Кроме того, он содержит материал и систему упражнений для изучения геометрии на профильном уровне. Теоретический материал этих уровней в учебнике выделен значком **п**. В классах академического уровня параграфы о геометрических преобразованиях и многогранных углах можно рассматривать сокращенно, без доказательств теорем. Упражнения и задачи в учебнике разделены на: упражнения для устного решения, уровни А, Б, В, упражнения повышенной сложности (обозначены *) и упражнения для повторения. Подавляющее большинство упражнений в уровне В предназначено для учеников, обучающихся по программе профильного уровня.

Для старшеклассников, имеющих желание продолжать изучение геометрии, в учебнике есть раздел «Элементы геометрии



тетраэдра», список тем для самостоятельных научных исследований и перечень дополнительной литературы.

В каждом параграфе учебника есть рубрика  «Выполним вместе». В ней приводятся задачи с решениями. Советуем просмотреть их, прежде чем выполнять домашнее задание.

Знать геометрию – это в первую очередь уметь пользоваться ею. Учиться пользоваться геометрическими знаниями лучше всего решая геометрические задачи. В учебнике есть задачи по каждой теме и каждому параграфу. Задания, рекомендованные для домашней работы, выделены **цветом**. В конце каждого раздела есть задачи по готовым рисункам, условия которых представлены в виде рисунков и кратких записей.

Для обобщения и систематизации изученного материала после каждого раздела есть «Главное в разделе». Проверить, как вы усвоили новый материал, и подготовиться к внешнему независимому оцениванию вы сможете решая задачи и выполняя задания из рубрик  «Тестовые задания» и  «Типовые задачи для контрольной работы».

В учебнике представлена только часть современной элементарной геометрии, предусмотренная программой. В приложении «Элементы геометрии тетраэдра» есть еще несколько тем – углубленно рассматриваются некоторые важнейшие свойства простейшего многогранника – тетраэдра. Это темы для самостоятельной проработки ученикам, желающим заниматься посильной научно-исследовательской работой. Их можно рассматривать на математических кружках, на других внеклассных и внешкольных мероприятиях. А задачи из «Приложений» можно предлагать всем ученикам классов с углубленным изучением математики.

Иногда считают, что важнейшее в геометрии – доказательство теорем. Конечно, учиться доказывать теоремы – дело полезное. Но не менее важную роль в этой науке играют понятия, их определение и классификация; геометрические фигуры, их построение и преобразование; геометрические величины, их измерение и вычисление. Один из известных геометров XX в. Д. Гильберт писал: «В огромном саду геометрии каждый может подобрать себе букет по вкусу».

Приглашаем вас в этот богатый и удивительный мир Геометрии!

Авторы

Координаты, геометрические преобразования и векторы в пространстве

Главные темы раздела:

- Прямоугольная система координат.
- Применение координат.
- Векторы в пространстве.
- Геометрические преобразования в пространстве.
- Гомотетия и преобразования подобия.



РАЗДЕЛ

1

*Геометрия – наука, которая изучает
свойства геометрических фигур,
не меняющихся при движении.*

И. Яглом



ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Прямоугольная система координат на плоскости рассматривалась в предыдущих классах. Аналогичную систему координат можно ввести и для пространства.

Пусть x , y , z – три попарно перпендикулярные координатные прямые, пересекающиеся в точке O (рис. 1). Назовем их *координатными осями*: «ось x », «ось y », «ось z ». Или соответственно: ось *абсцисс*, ось *ординат* и ось *аппликат*.

Точка O – *начало координат*. Каждая ось точкой O разбивается на две полуоси – положительную, обозначенную стрелкой, и отрицательную. Плоскости, проходящие через оси x и y , x и z , y и z , – *координатные плоскости*. Обозначают их соответственно: xy , xz и yz . Координатные плоскости разбивают пространство на 8 *октантов*.

Если задана такая система координат, то каждой точке пространства можно поставить в соответствие единственную упорядоченную тройку действительных чисел, а каждой тройке чисел – единственную точку.

Пусть дана точка A . Опустим из нее на плоскости yz , xz , xy перпендикуляры AA_x , AA_y , AA_z (рис. 2). Длины a , b , c этих перпендикуляров, взятые с соответствующими знаками, называют *координатами точки A* . Записывают: $A(a; b; c)$, где a – абсцисса, b – ордината, c – аппликата точки A . Если точка лежит в какой-либо координатной плоскости, ее соответствующая координата равна нулю. Например, точка $B(0; 2; -3)$ лежит в плоскости yz , точка $C(5; 0; 0)$ – на оси x .

Если через точку $A(a; b; c)$ провести плоскость, перпендикулярную к оси x , то она эту координатную ось пересечет в точке с координатой a . Плоскости, проходящие через точку A перпендикулярно к осям y и z , пересекают их соответственно в точках с координатами b и c . В общем, координаты точки

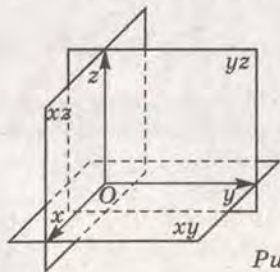


Рис. 1

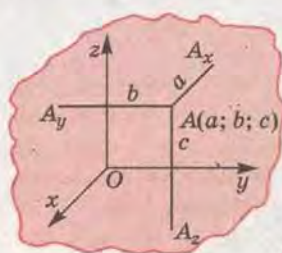


Рис. 2



$A(a; b; c)$ – это координаты проекций данной точки соответственно на координатные оси x, y, z .

Например, точки (см. рис. 3) имеют такие координаты: $A(0; 5; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $M(0; 5; 4)$, $K(2; 3; 4)$, $P(-2; 3; -4)$.

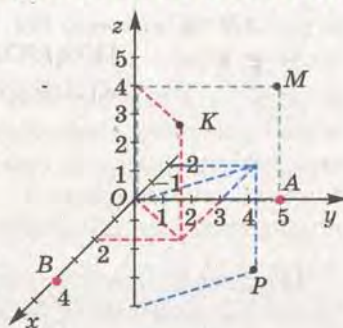


Рис. 3

Теорема 1. *Квадрат расстояния между двумя точками равен сумме квадратов разностей их соответствующих координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 4). Докажем, что

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Рассмотрим случай, когда данные точки расположены, как показано на рисунке 4. Прямые AA_z и BB_z , параллельные оси z , пересекают плоскость xy в точках $A_z(x_1; y_1; 0)$ и $B_z(x_2; y_2; 0)$. Проведем через точку B плоскость α , параллельную плоскости xy . Она пересечет прямую AA_z в некоторой точке C . По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Отрезки CB и A_zB_z равны и, как известно из планиметрии, $A_zB_z^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

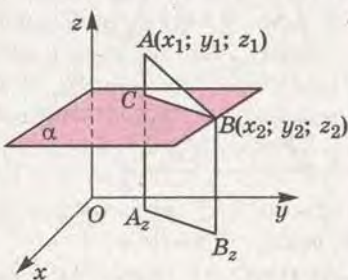


Рис. 4

Длина отрезка $AC = |z_2 - z_1|$, поэтому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Если отрезок AB параллелен, например, оси z , то $AB = |z_2 - z_1|$. Такой же результат дает и общая формула при $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$.

Аналогично можно рассмотреть и другие случаи и убедиться, что всегда

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Доказанная теорема тесно связана с обобщенной для пространства теоремой Пифагора.

Пусть в плоскости даны перпендикулярные прямые Ox, Oy и отрезок AB (рис. 5). Если A_xB_x, A_yB_y – проекции от-

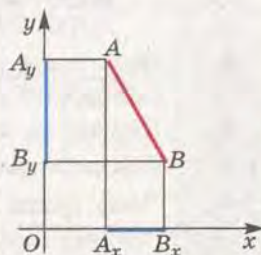
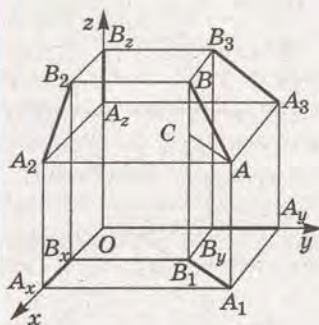


Рис. 5

презка AB на прямые Ox , Oy и если $AB \nparallel Ox$, $AB \nparallel Oy$, то по теореме Пифагора $AB^2 = A_x B_x^2 + A_y B_y^2$. Это равенство справедливо и в том случае, когда $AB \parallel Ox$ или $AB \parallel Oy$. Следовательно, теорему Пифагора можно обобщить так: *квадрат длины отрезка равен сумме квадратов его проекций на две перпендикулярные прямые.*

Аналогичное утверждение справедливо и для пространства.

Теорема 2 (пространственная теорема Пифагора). *Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на три взаимно перпендикулярные прямые.*





Выполним вместе

1. Составьте уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки $A(1; 2; 3)$ и начала координат.

РЕШЕНИЕ. Пусть $M(x; y; z)$ – любая точка искомого геометрического места точек. Тогда $MA^2 = MO^2$, или

$$(1 - x)^2 + (2 - y)^2 + (3 - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

отсюда

$$x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Это и есть искомое уравнение.

2. Найдите координаты точки C , лежащей на оси ординат, если известно, что $\triangle ABC$ с вершинами в точках $A(-7; 1; 2)$ и $B(5; 3; 1)$ прямоугольный.

РЕШЕНИЕ. В задаче не сказано, какой из углов должен быть прямым. Поэтому нужно рассмотреть три варианта, когда прямым будет угол при вершине A , или при вершине B , или при вершине C .

Рассмотрим случай, когда $\angle A = 90^\circ$. Тогда по теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Пусть $C(0; y; 0)$ – искомая точка. Тогда

$$BC^2 = 25 + (y - 3)^2 + 1 = (y - 3)^2 + 26;$$

$$AB^2 = 144 + 4 + 1 = 149;$$

$$AC^2 = 49 + (y - 1)^2 + 4 = (y - 1)^2 + 53.$$

Получим уравнение $(y - 3)^2 + 26 = 149 + (y - 1)^2 + 53$.

Его корень $y = 42$. Следовательно, $C_1(0; 42; 0)$.

Рассмотрев случаи, если прямым будет угол B или угол C , получим окончательный ответ:

$$C_1(0; 42; 0); C_2(0; 32,5; 0);$$

$$C_3(0; 2 + \sqrt{39}; 0); C_4(0; 2 - \sqrt{39}; 0).$$



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



1. Назовите координаты точек, изображенных на рисунке 7.
2. Даны точки $A(0; 3; 1)$, $B(-2; 0; 0)$, $C(0; 0; 4)$, $D(0; -3; 0)$. Какие из них лежат:
а) на оси x ; б) на оси z ; в) в плоскости xy ; г) в плоскости yz ?
3. Чем является геометрическое место точек пространства, для которых равна нулю: а) первая координата; б) вторая

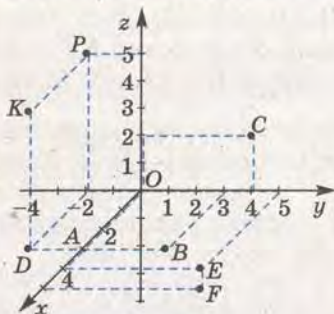


Рис. 7

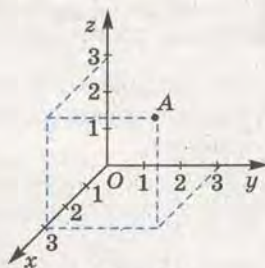


Рис. 8

- координата; в) третья координата; г) первые две координаты; д) вторые две координаты; е) первая и третья координаты; ж) все три координаты?
- Дана точка $A(3; 3; 3)$ (рис. 8). Найдите расстояние от нее до: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.
 - Найдите расстояния от точки $M(2; -3; 1)$ до координатных плоскостей.
 - Дана точка $K(2; -3; 1)$. Найдите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные плоскости.
 - Дана точка $P(2; 3; 1)$. Найдите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси.
 - Тетраэдр $ABCD$ задан координатами вершин: $A(2; 0; 3)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(4; 0; -1)$, $D(1; 3; 1)$. В какой координатной плоскости лежит основание ABC тетраэдра?
 - Пирамида $SABCD$ задана координатами своих вершин: $S(-2; 3; -5)$, $A(3; 1; -1)$, $B(3; 2; 2)$, $C(3; -1; 4)$, $D(3; -2; -2)$. Как расположена плоскость основания $ABCD$ относительно координатных плоскостей?
 - Какие из координатных плоскостей пересекают плоскость $\triangle MNK$, если $M(-2; 2; 4)$, $N(0; -1; 4)$, $K(3; 5; 4)$?

А

- Постройте в прямоугольной системе координат точки: $A(6; 0; 0)$, $B(0; 0; 5)$, $C(0; 3; -2)$, $D(4; -2; 0)$, $E(2; 4; 4)$, $F(6; -4; -3)$.
- Найдите координаты точек, удаленных от каждой из координатных плоскостей на 4.
- Найдите расстояние между точками $B(-2; 0; 3)$ и $K(3; 4; -2)$.
- Какая из точек — $A(2; 1; 5)$ или $B(-2; 1; 6)$ — лежит ближе к началу координат?
- Даны точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$ и $C(3; 1; 2)$. Найдите периметр треугольника ABC .

16. Даны точки $K(0; 1; 1)$, $P(2; -1; 3)$ и $T(-1; y; 0)$. Найдите такое значение y , чтобы выполнялось условие $KT = PT$.
17. Являются ли точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$ и $C(3; 4; 5)$ вершинами треугольника?
18. Даны точки $A(a; b; c)$, $B(2a; 2b; 2c)$, $C(3a; 3b; 3c)$ и $D(4a; 4b; 4c)$, где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Докажите, что точки B и C делят отрезок AD на три равные части.
19. Найдите координаты точки, лежащей на оси y и равноудаленной от точек $A(4; -1; 3)$ и $B(1; 3; 0)$.

Б

20. Найдите длины проекций отрезка AB на координатные плоскости и оси, если координаты его концов $A(1; 1; 1)$ и $B(1; 4; 5)$.
21. Докажите, что точки $A(-2; 0; 5)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(1; 1; -3)$ и $D(0; -1; -1)$ являются вершинами параллелограмма.
22. Установите вид $\triangle ABC$ и найдите его периметр и площадь, если:
 - а) $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$;
 - б) $A(2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; 4; 0)$;
 - в) $A(2; 4; -1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(5; 1; 2)$.
23. Установите вид четырехугольника $MNPK$ и найдите его площадь, если:
 - а) $M(0; -2; 0)$, $N(4; 1; 0)$, $P(4; 1; 5)$, $K(0; -2; 5)$;
 - б) $M(6; 8; 2)$, $N(2; 4; 3)$, $P(4; 2; 8)$, $K(8; 6; 7)$;
 - в) $M(1; 1; 1)$, $N(1; 0; 1)$, $P(1; 0; 0)$, $K(1; 1; 0)$.
24. Изобразите в системе координат прямую, проходящую через точки $A(0; 0; 5)$ и $B(0; 5; 0)$. Найдите углы между прямой AB и осями координат.
25. Даны точки $A(0; 0; 4)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 2)$ и $D(2; 0; 0)$. Найдите угол между прямыми AB и CD .
26. Изобразите в системе координат плоскость, проходящую через точки $A(0; 0; 4)$, $B(0; 4; 0)$ и $C(4; 0; 0)$. Под какими углами к этой плоскости наклонены оси координат?
27. Точки $A(0; 0; 0)$, $B(b; 0; 0)$, $C(0; c; 0)$ и $D(0; 0; h)$ – вершины параллелепипеда. Найдите координаты точек A_1, B_1, C_1, D_1 .
28. Точки $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(-1; -1; 1)$ и $C_1(-1; -1; -1)$ – вершины куба. Найдите координаты точек A_1, B_1, D_1, D .

В

29. Найдите координаты точки, лежащей в плоскости xy и равноудаленной от точек $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; 1)$ и $C(0; -1; 0)$.
30. Найдите точки, равноудаленные от точек $A(0; 0; 1)$, $B(0; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$ и удаленные от плоскости yz на расстояние 2.

31. Даны точки $P(3; 8; 1)$ и $Q(2; 9; 1)$. В плоскости xy найдите координаты точки R , если $\triangle PQR$ – правильный.
32. В $\triangle ABC$ вершины A и C имеют координаты: $A(3; 2; 1)$, $C(-2; -1; 3)$. На оси Oz найдите точку B такую, что $\triangle ABC$ будет: а) равнобедренным; б) прямоугольным; в) равносторонним.
33. Докажите, что пирамида $SABC$, заданная координатами своих вершин $S(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$, – правильная.
34. Основание ABC правильного тетраэдра $ABCD$ лежит в плоскости yz . Найдите координаты вершин B и D , если $A(0; -2; 0)$, $C(0; 2; 0)$.
35. Укажите геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих такому уравнению:

$$а) \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2} = 10;$$

$$б) \sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2} = 4.$$



Упражнения для повторения

36. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого лежат в точках $A(0; 0)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 4)$, $D(3; 1)$.
37. Найдите длину медианы ND треугольника MNK , если $M(-2; 4)$, $N(2; 5)$, $K(0; -2)$.
38. Сколько прямых, параллельных плоскостям α и β , можно провести через точку, не принадлежащую этим плоскостям?



ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Как выражаются координаты x , y , z точки $C(x; y; z)$ – середины отрезка AB – через координаты его концов $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$?

Теорема 3. Если $C(x; y; z)$ – середина отрезка с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спроектируем точки A , B и C на плоскость xy ; их проекциями будут точки $A_z(x_1; y_1; 0)$, $B_z(x_2; y_2; 0)$, $C_z(x; y; 0)$ (рис. 9). Поскольку проекцией середины отрезка является середина его проекции, то точка C_z — середина отрезка A_zB_z . А из планиметрии известно, что на плоскости xy координаты середины отрезка выражаются через координаты его концов по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Спроектировав точки A , B , C на плоскость xz , аналогично найдем

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Например, если $C(x; y; z)$ — середина отрезка с концами $A(3; 6; 5)$ и $B(1; 0; -7)$, то

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{6+0}{2} = 3, \quad z = \frac{5-7}{2} = -1.$$

Поэтому серединой отрезка AB является точка $C(2; 3; -1)$. Обобщим теорему 3.

Теорема 4. Если точка $P(x; y; z)$ отрезка с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ такая, что $AP : PB = m : n$, то

$$x = \frac{1}{m+n}(nx_1 + mx_2), \quad y = \frac{1}{m+n}(ny_1 + my_2),$$

$$z = \frac{1}{m+n}(nz_1 + mz_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$ (рис. 10). Спроектировав точки A , B и P на плоскость xy и ось Ox , будем иметь:

$$A_zP_z : P_zB_z = AP : PB = m : n, \text{ или } (x_1 - x) : (x - x_2) = m : n.$$

$$\text{Отсюда } x = \frac{1}{m+n}(nx_1 + mx_2).$$

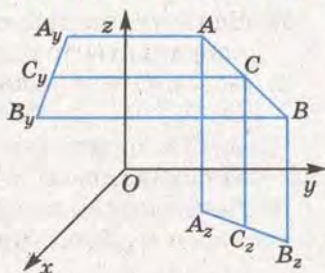


Рис. 9

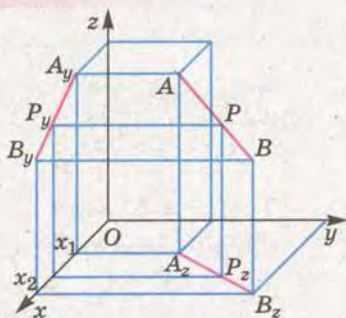


Рис. 10

π

Аналогично можно получить

$$y = \frac{1}{m+n}(ny_1 + my_2), \quad z = \frac{1}{m+n}(nz_1 + mz_2).$$

Если $x_1 = x_2$, или $y_1 = y_2$, или $z_1 = z_2$, то доказываемые формулы тоже правильны. Убедитесь в этом самостоятельно.

Если числители и знаменатели рассматриваемых формул разделить на n и обозначить $AP : PB = \lambda$, то получим формулы:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Эти формулы задают координаты точки P , которая делит отрезок AB в отношении $AP : PB = \lambda$.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте теорему о координатах середины отрезка.
2. Чему равны координаты точки, которая делит в отношении $m : n$ отрезок с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$?
3. Как найти координаты точки M , которая делит отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$?
4. Чему равны координаты середины отрезка с концами в точках $A(4; 0; 2)$ и $B(6; 8; 6)$?



Выполним вместе

1. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках $A(7; 0; 6)$, $B(4; 2; 2)$, $C(-3; 2; 2)$, $D(0; 0; 6)$ – параллелограмм.

РЕШЕНИЕ. Найдем координаты середины диагоналей AC и BD .

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2, \quad y_1 = \frac{0+2}{2} = 1, \quad z_1 = \frac{6+2}{2} = 4.$$

Следовательно, середина диагонали AC имеет координаты $O_1(2; 1; 4)$. Аналогично

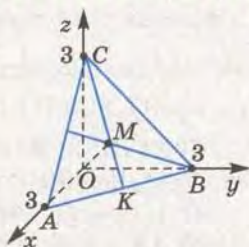
$$x_2 = \frac{4+0}{2} = 2, \quad y_2 = \frac{2+0}{2} = 1, \quad z_2 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Т. е. середина диагонали BD имеет координаты $O_2(2; 1; 4)$.

Поскольку координаты середин диагоналей совпадают, то это значит, что диагонали четырехугольника пересекаются и

точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.

2. Пирамида $OABC$ задана координатами своих вершин: $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$ (рис. 11). Найдите длину высоты OM .



РЕШЕНИЕ. Найдем длины ребер данной пирамиды. Поскольку $AB = BC =$

$= AC = 3\sqrt{2}$ и $OA = OB = OC = 3$, то пирамида правильная. Следовательно, $M(x; y; z)$ – точка пересечения медиан $\triangle ABC$. По свойству медиан треугольника $CM : MK = 2 : 1$, т. е. $\lambda = 2$.

Поскольку точка K – середина AB – имеет координаты $K\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$, то $x = \frac{0+2 \cdot 1,5}{1+2} = 1$, $y = \frac{0+2 \cdot 1,5}{1+2} = 1$, $z = \frac{3+2 \cdot 0}{1+2} = 1$.

Следовательно, координаты точки $M(1; 1; 1)$.

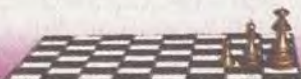
Тогда $OM = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

ОТВЕТ. $OM = \sqrt{3}$.

Рис. 11

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



39. Найдите координаты середины отрезка AB , если:
 - а) $A(-1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$;
 - б) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2; 2)$;
 - в) $A(-2; 4; 2)$, $B(2; -4; 2)$.
40. Является ли начало координат серединой отрезка CD , если:
 - а) $C(-1; 0; 2)$, $D(1; 0; -2)$;
 - б) $C(-4; 2; 6)$, $D(4; -2; 6)$?
41. На какой координатной оси лежит середина отрезка MN , если:
 - а) $M(2; 4; -6)$, $N(-2; 2; 6)$;
 - б) $M(-3; 0; 7)$, $N(3; 0; 2)$?
42. Какой координатной плоскости принадлежит середина отрезка KP , если:
 - а) $K(2; 1; 4)$, $P(4; 0; -4)$;
 - б) $K(-6; 2; 1)$, $P(4; -2; 3)$?
43. Найдите координаты середины ребер и центров граней куба, изображенного на рисунке 12.

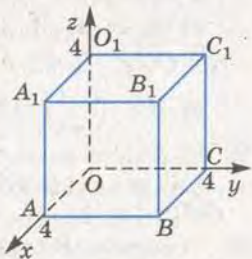


Рис. 12



44. Найдите координаты середины отрезка PQ , если:
- $P(1, 2; -3; 6, 3)$, $Q(-2, 6; 3, 2; -5, 1)$;
 - $P(\sqrt{3}; 2; 1 - \sqrt{2})$, $Q(3\sqrt{3}; 1; 1 + \sqrt{2})$.
45. Даны точки $A(3; -1; 4)$, $B(-1; 1; -8)$, $C(2; 1; -6)$, $D(0; 1; 2)$. Найдите расстояние между серединами отрезков:
- AB и CD ;
 - AC и BD .
46. Точка M – середина отрезка AB . Найдите координаты точки B , если $A(2; -1; 6)$, $M(1; 4; 0)$.
47. Точки M и N делят отрезок AB на три равные части. Найдите координаты концов отрезка, если $M(1; -1; 2)$, $N(-3; 2; 4)$.
48. Найдите длины медиан $\triangle ABC$, если $A(3; 3; 0)$, $B(-5; 1; 2)$, $C(5; -3; -2)$.
49. Найдите длины средних линий $\triangle EFK$, заданного координатами своих вершин: $E(-1; 4; 2)$, $F(-3; 2; -2)$, $K(1; -2; -2)$.
50. Точки M и N – середины сторон AB и BC треугольника ABC . Найдите координаты вершин A и C , если $B(2; 0; -4)$, $M(3; -1; 2)$, $N(1; -4; 0)$.
51. AM – медиана $\triangle ABC$. Найдите длину медианы BN , если $A(2; -4; 2)$, $C(0; 0; 6)$, $M(1; 2; 4)$.
52. Будет ли четырехугольник $ABCD$ параллелограммом, если:
- $A(1; -3; 12)$, $B(0; 2; 6)$, $C(3; 3; -10)$, $D(4; -2; -4)$;
 - $A(4; 2; -5)$, $B(-6; 2; 8)$, $C(2; -3; 9)$, $D(12; 2; -4)$?
53. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если:
- $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$;
 - $A(-1; 7; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$.
54. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершин C и D , если $A(1; 3; -2)$, $B(-4; 0; 5)$, $O(1; 0; 2)$.



55. Найдите координаты точки M , которая делит отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$, если:
- $A(-5; 4; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $\lambda = 2$;
 - $A(1; -1; 2)$, $B(2; -4; 1)$, $\lambda = 0,5$;
 - $A(1; 0; -2)$, $B(9; -3; 6)$, $\lambda = \frac{1}{3}$.
56. Найдите координаты точки пересечения медиан $\triangle MNP$, если $M(3; 2; 4)$, $N(1; 3; 2)$, $P(-3; 4; 3)$.
57. Середина P отрезка MN лежит на оси z (рис. 13). Найдите числа a и b , если:

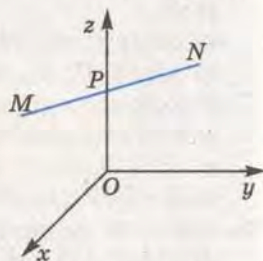


Рис. 13

- а) $M(a; -2; 3)$, $N(2; b; -1)$;
 б) $M(2a^2; -b; 1)$, $N(a - 1; 1; 5)$;
 в) $M(3a; b + 1; 4)$, $N(b; 1 - a; -2)$.
58. Найдите высоту $\triangle ABC$, проведенную к наибольшей стороне, и его площадь, если $A(1; -1; 2)$, $B(4; 2; -1)$, $C(1; 5; 2)$.
59. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(3; 1; -1)$. Найдите:
 а) высоту, проведенную к наибольшей стороне;
 б) углы треугольника;
 в) площадь треугольника.
60. Даны координаты трех вершин параллелограмма: $A_1(1; -2; 3)$, $A_2(3; 2; 1)$, $A_3(-1; 4; -1)$. Найдите координаты четвертой вершины. Сколько решений имеет задача?
61. Найдите расстояние от начала координат до точки пересечения медиан $\triangle ABC$, если $A(-1; 2; 10)$, $B(1; 0; 2)$, $C(3; 4; -6)$.
62. Найдите координаты центра окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$, если: а) $A(-1; 1; 5)$, $B(5; -1; 1)$, $C(1; 5; -1)$;
 б) $A(-1; 3; 1)$, $B(2; 4; 1)$, $C(3; 1; 3)$.
63. Найдите координаты центра окружности, вписанной в $\triangle ABC$, если:
 а) $A(-2; 6; 4)$, $B(4; -2; 6)$, $C(6; 4; -2)$;
 б) $A(5; 1; 2)$, $B(2; 4; -1)$, $C(-1; 1; 2)$.
64. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, основание $ABCD$ которого лежит в плоскости xy и $A(-2; 4; 0)$, $B(2; 7; 0)$, $C(5; 3; 0)$. Найдите координаты других вершин куба и координаты точки пересечения его диагоналей.
65. Найдите координаты вершины C треугольника ABC , если даны вершины $A(3; 4; 0)$, $B(7; 6; -5)$ и точка пересечения медиан $M(1; 2; -2)$.
66. BL – биссектриса $\triangle ABC$. Найдите координаты точки L , если $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$.
67. Найдите длину биссектрисы ML треугольника MNK , если $M(4; 0; 1)$, $N(5; -2; 1)$, $K(4; 8; 5)$.
68. Найдите расстояние от начала координат к плоскости, проходящей через точки $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; 6)$.
69. Плоскость α проходит через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ и $C(0; 0; 2)$, а плоскость β – через точки $K(4; 0; 0)$, $P(0; 4; 0)$ и $T(0; 0; 4)$. Докажите, что $\alpha \parallel \beta$. Найдите расстояние между этими плоскостями.
70. Найдите высоту SO пирамиды $SABC$ и углы наклона ее боковых ребер к плоскости основания, если:
 а) $S(2; 2; 2)$, $A(-2; 0; 4)$, $B(4; -2; 0)$, $C(0; 4; -2)$;
 б) $S(2; -1; 0)$, $A(0; 4; 1)$, $B(4; 4; 1)$, $C(0; 0; 5)$.

Упражнения для повторения

71. Установите вид $\triangle EFK$, заданного координатами вершин: $E(1; 5; 3)$, $F(3; 1; 5)$, $K(5; 3; 1)$. Найдите его периметр и площадь.
72. Запишите уравнение окружности, описанной около треугольника BCD , если $B(-6; 2)$, $C(-2; 5)$, $D(1; 1)$.
73. Найдите длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (6; -1)$.



УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ, ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ

Уравнением фигуры называют уравнение, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной фигуры и только точки данной фигуры. Из планиметрии известны уравнения прямой $ax + by + c = 0$ и окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,

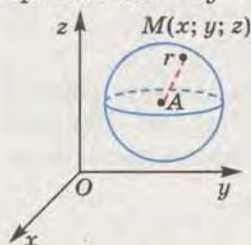


Рис. 14

расположенных на координатной плоскости. Аналогичные уравнения соответствуют многим фигурам в пространстве.

Уравнение сферы. Сферой называют геометрическое место точек пространства, удаленных на одно и то же расстояние r от данной точки. Эта точка – центр сферы, а расстояние r – ее радиус.

Сфера радиуса r с центром в точке $A(a; b; c)$ – это множество всех точек, удаленных от A на расстояние r (рис. 14). По теореме 1 каждая точка $M(x; y; z)$ данной сферы удовлетворяет уравнению:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Это уравнение сферы радиуса r с центром в точке $A(a; b; c)$.

Если $a = b = c = 0$, получим уравнение сферы радиуса r с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

ПРИМЕР. Сфере с центром в точке $A(1; -2; 3)$ радиуса $r = 4$ соответствует уравнение $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$, или

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0.$$

Уравнение плоскости. Пусть α – произвольная плоскость, а точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ такие, что данная плоскость α перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину M (рис. 15). Любая точка $K(x; y; z)$ плоскости α равноудалена

от A и B , поскольку $\triangle KMA = \triangle KMB$.
Поэтому $AK^2 = BK^2$, или

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2. (*)$$

Наоборот, если координаты x, y, z удовлетворяют уравнению (*), то точка $K(x; y; z)$ равноудалена от A и B , а следовательно, принадлежит плоскости α .

Как видим, уравнение (*) является уравнением данной плоскости. Его можно представить в другом виде:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = 0.$$

Если обозначим $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $2(z_2 - z_1) = c$,

$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = d$, получим уравнение:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Следовательно, любой плоскости в декартовой системе координат соответствует уравнение $ax + by + cz + d = 0$.

Уравнение прямой. Прямая в пространстве — линия пересечения двух плоскостей. Поэтому ей соответствует система

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \end{cases}$$

Координаты каждой точки данной прямой удовлетворяют этой системе уравнений, и каждое решение системы — тройка значений x, y и z — координаты точки, лежащей на данной прямой.

Если прямая AB , которая проходит через точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, не параллельна ни одной координатной плоскости, ей соответствует система уравнений

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. (**)$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим рисунок 16. Здесь $M(x; y; z)$ — произвольная точка прямой AB , A_2, B_2, M_2 — проекции точек A, B и M на плоскость xOy , а прямая AP , параллельная A_2B_2 , пересекает прямые BB_2 и MM_2 в точках K и P .

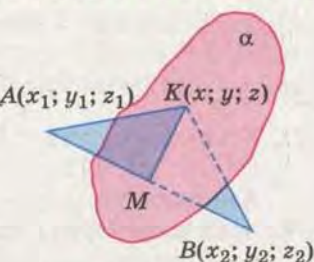


Рис. 15

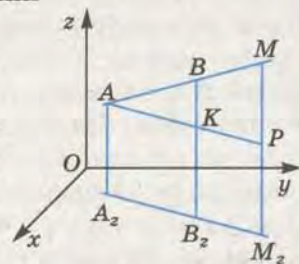


Рис. 16

π Прямоугольные треугольники AMP и ABK подобны, $MP : BK = AM : AB$,

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = AM : AB.$$

Аналогично, спроектировав прямую AB на другие координатные плоскости, получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = AM : AB \text{ и } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = AM : AB.$$

Из трех последних равенств следует система уравнений (**), которую называют *уравнением прямой, проходящей через две точки*.

Например, прямой, проходящей через точки $A(1; -2; 0)$ и $B(3; 1; 4)$, соответствует система:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z}{4}.$$

π Если в системе уравнений (**) ввести обозначения $x_2 - x_1 = m$, $y_2 - y_1 = n$, $z_2 - z_1 = p$, то получим *каноническое уравнение*

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \quad (***)$$

Если в этом уравнении все отношения обозначить через t , т. е. $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} = t$, то получим систему

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt. \end{cases}$$

Полученная система уравнений называется *параметрическим уравнением прямой*. Пользуясь параметрическим уравнением прямой, удобно находить точки пересечения прямых, прямой и плоскости, прямой и сферы.

Отметим, что в каноническом уравнении прямой одно или два (но не три) из чисел m , n , p может равняться нулю, поскольку в данном случае это значит не деление на нуль, а условную форму записи. При этом если одно из этих чисел равно нулю, то прямая будет параллельна одной из координатных плоскостей. Если же нулю равны два числа, то прямая

π будет параллельна одной из координатных осей. Например, если $m = 0$, то прямая параллельна плоскости yz , а если одновременно $m = 0$ и $n = 0$, то прямая будет параллельна оси Oz .



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое уравнение фигуры?
2. Какую геометрическую фигуру называют сферой?
3. Какой вид имеет уравнение сферы? А сферы с центром в начале координат?
4. Какой вид имеет уравнение плоскости?
5. Как с помощью уравнений можно задать прямую в пространстве?



Выполним вместе

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4; 2; -1)$, $B(-1; 0; 3)$ и $C(0; 0; 1)$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Поскольку точки A, B, C принадлежат плоскости, их координаты удовлетворяют ее уравнению, т. е.

$$4a + 2b - c + d = 0, \quad -a + 3c + d = 0, \quad c + d = 0.$$

Выразим коэффициенты a, b, c через d : $c = -d$, $a = -2d$, $b = 3d$. Следовательно, $-2dx + 3dy - dz + d = 0$, откуда $2x - 3y + z - 1 = 0$.

2. Найдите длину хорды, которую отсекает сфера $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 35$ от прямой AB , если $A(2; 0; 1)$, $B(6; 1; -2)$.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Тогда уравнение прямой AB будет иметь вид:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-3} = t,$$

откуда
$$\begin{cases} x = 4t + 2, \\ y = t, \\ z = -3t + 1. \end{cases}$$

Найдем координаты точек пересечения прямой и сферы:

$$(4t + 1)^2 + (t + 2)^2 + (2 - 3t)^2 = 35,$$

$$\text{или } 16t^2 + 8t + 1 + t^2 + 4t + 4 + 4 - 12t + 9t^2 = 35,$$

откуда $26t^2 = 26$, т. е. $t = \pm 1$.

Тогда $M_1(6; 1; -2)$, $M_2(-2; -1; 4)$.

$$\text{Поэтому } M_1M_2 = \sqrt{64 + 4 + 36} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



74. Какие из уравнений не являются уравнением плоскости:
 а) $2x + 3y - z - 2 = 0$; б) $x + y = 5$; в) $z = 4$; г) $x^2 + y^2 - z^2 = 5$;
 д) $y = 0$; е) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$; ж) $x + 2y - xy + 3z = 2$?
75. Какая из плоскостей проходит через начало координат:
 а) $x + 2y + z = 5$; б) $3x - 2y + z = 0$; в) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 0$?
76. Какие фигуры задают такие уравнения:
 а) $z = 0$; б) $y = 2$; в) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
 г) $x^2 - y^2 = 0$; д) $(x - 2)(y + 3) = 0$; е) $(z - 2)(z + 4) = 0$?
77. Составьте уравнение сферы с центром в начале координат радиуса 2.
78. Какая из прямых проходит через начало координат:
 а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$; б) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$?
- А**
79. Составьте уравнение сферы радиуса $r = 5$ с центром в точке $A(1; 0; 4)$.
80. Назовите координаты трех точек, принадлежащих сфере радиуса $r = 10$ с центром в начале координат.
81. Принадлежит ли точка $M(3; 2; -1)$ сфере, уравнение которой $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$?
82. Составьте уравнение сферы с центром в точке $B(1; 1; 3)$, если известно, что она проходит через точку $M(2; 0; -1)$.
83. Составьте уравнение сферы с диаметром AB , если $A(-2; 1; 4)$, $B(0; 3; 2)$.
84. Составьте уравнение сферы, радиусом которой является отрезок AB , если $A(-2; 1; 3)$, $B(0; 2; 1)$.

85. Найдите точки пересечения сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 12$, с осью x .
86. Какие из координатных осей пересекает сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 12y + 19 = 0$? Найдите координаты точек пересечения.
87. Дана сфера радиуса $r = 5$ с центром в точке $A(2; 4; 3)$. Найдите длину линии пересечения этой сферы с плоскостью xy .
88. Составьте уравнение сферы с центром в точке $(-2; 3; 1)$, касающейся плоскости:
а) xy ; б) yz ; в) xz .
89. Найдите радиус и координаты центра сферы:
а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z = 31$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y = 26$.
90. Проходит ли плоскость, заданная уравнением $2x + 4y + 3z - 7 = 0$, через точку $A(2; 3; -1)$? А через точку $B(-1; 0; 3)$?
91. Найдите координаты точек, в которых плоскость, заданная уравнением $2x - y + 3z + 6 = 0$, пересекает координатные оси.
92. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось x и точку $A(1; 1; 1)$.
93. Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости xy и проходящей через точку $A(2; 3; 4)$.

Б

94. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $O(0; 0; 0)$, $A(1; 2; -3)$ и $B(2; -2; 5)$.
95. Прямая задана системой уравнений $x - y + 4z = 0$ и $2x + y + 3z - 1 = 0$. Найдите координаты точек пересечения этой прямой с координатными плоскостями.
96. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 3; 2)$ и $B(-5; 7; 4)$.

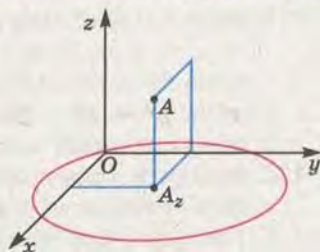
97. Прямая задана системой уравнений $\frac{x-3}{5} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+2}{7}$.

Назовите координаты каких-либо трех точек этой прямой.

98. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $P(-1; 4; 2)$ и делит отрезок MN пополам, если $M(4; -1; 3)$, $N(-2; 3; 5)$.
99. Плоскость и прямая заданы уравнениями $3x - 2y + z - 7 = 0$ и $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-3}{3}$. Пересекаются ли они? В какой точке?

100. Прямая и сфера заданы уравнениями $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{4}$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 13$. Пересекаются ли они? В каких точках?

101. Сфера с центром $A(2; 3; 4)$ проходит через начало координат (рис. 17). Напишите уравнение окружностей, по которым координатные плоскости пересекают сферу.



102. Составьте уравнение сферы, проходящей через точки: $O(0; 0; 0)$, $A(4; 4; 2)$, $B(0; 0; 2)$ и $C(0; 4; 0)$.
103. Составьте уравнение сферы, если известно, что она проходит через точки $A(0; 5; 1)$, $B(-2; 0; 4)$, а ее центр лежит на оси z .
104. Найдите геометрическое место точек пространства, расстояние от которых до сферы $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 25$ равно 2.

Рис. 17

В

105. В зависимости от значений параметра a установите взаимное расположение сфер:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14 \text{ и } (x - 6)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = a^2.$$

106. Нарисуйте плоскость, заданную уравнением:

а) $x = 3$; б) $y = -4$; в) $z = 5$; г) $y - 4x = 0$;

д) $y - z - 2 = 0$; е) $x + y = 5$; ж) $x + y + z = 4$.

107. Докажите, что каждой плоскости, проходящей через начало координат, соответствует уравнение вида $ax + by + cz = 0$.

108. Докажите, что если точка $A(a; b; c)$ — основание перпендикуляра, проведенного из начала координат на плоскость (рис. 18), то уравнение этой плоскости $ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$.

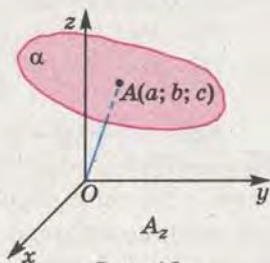


Рис. 18

109. На координатных осях даны точки A , B , C такие, что $OA = OB = OC = 2$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через эти точки.
110. Докажите, что если на координатных осях x , y , z даны точки A , B , C такие, что $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, то плоскость, проходящая через эти точки, соответствует уравнению $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
111. Точки $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ и $O_1(0; 0; 5)$ — вершины прямоугольного параллелепипеда. Составьте уравнения плоскостей всех его граней.

112. Координаты точек какой фигуры удовлетворяют системе неравенств: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 4$?
113. Плоскость и сфера заданы уравнениями $4x + 3y - 4 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 8 = 0$. Принадлежит ли центр сферы данной плоскости?
114. Найдите длину линии, по которой плоскость $z = 2 - y$ пересекает сферу $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 25$.
115. В каком соотношении плоскость $3x + 2y + z - 17 = 0$ делит отрезок AB , если $A(1; -1; 4)$, $B(5; 3; 2)$?



Упражнения для повторения

116. Напишите уравнение окружности, вписанной в $\triangle ABC$, если $A(-3; 0)$, $B(1; 3)$, $C(1; -3)$.
117. Используя координатный метод, докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности, вписанной в квадрат, до вершин этого квадрата является величиной постоянной.
118. Точка M не принадлежит скрещивающимся прямым a и b . Всегда ли можно через точку M провести прямую, которая будет пересекать каждую из прямых a и b ?



§4 ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ

π

Если решают задачу или доказывают теорему, применяя координаты точек, уравнение линий или поверхностей, говорят о *методе координат*. Для примера решим этим методом несколько задач.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что все три средние линии тетраэдра проходят через одну точку и делятся ею пополам (средняя линия тетраэдра — отрезок, соединяющий середины его противоположных ребер).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр, KL , EF и PT — его средние линии. Введем систему координат (рис. 19) и обозначим координаты вершин тетраэдра: $A(m; n; h)$, $B(0; 0; 0)$, $C(c; b; 0)$, $D(a; 0; 0)$. Тогда координаты

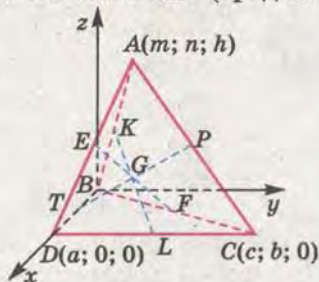


Рис. 19

п наты средин ребер и соответствующих средних линий тетраэдра будут:

$$K\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}; \frac{h}{2}\right), L\left(\frac{a+c}{2}; \frac{b}{2}; 0\right), G\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right), \\ E\left(\frac{m+a}{2}; \frac{n}{2}; \frac{h}{2}\right), F\left(\frac{c}{2}; \frac{b}{2}; 0\right), G_1\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right), \\ P\left(\frac{m+c}{2}; \frac{n+b}{2}; \frac{h}{2}\right), T\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), G_2\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right).$$

Соответствующие координаты точек G , G_1 и G_2 равны. Следовательно, эти точки совпадают. G – середина каждой средней линии данного тетраэдра. (Решите задачу другим способом.)

Точка G , в которой пересекаются все средние линии тетраэдра, называется *центроидом тетраэдра*.

ЗАДАЧА 2. Найдите на трех попарно скрещивающихся ребрах куба такие три точки, сумма квадратов расстояний между которыми была бы наименьшей.

РЕШЕНИЕ. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – произвольный куб, K, P, T – точки на его попарно скрещивающихся ребрах $AB, CC_1, A_1 D_1$. Если ввести систему координат (рис. 20) и обозначить длину ребра куба a , то координаты точек будут: $K(a; y; 0)$, $P(0; 0; z)$, $T(x; a; a)$. Сумма квадратов расстояний между точками: $KP^2 + PT^2 + TK^2 = a^2 + y^2 + z^2 + x^2 + a^2 + (a-z)^2 + (a-x)^2 + (a-y)^2 + a^2 = 2(3a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - ax - ay - az) =$
 $= 2\left(\frac{9}{4}a^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right).$

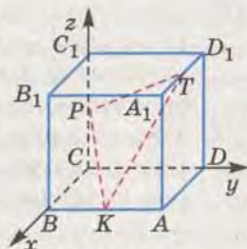


Рис. 20



Рис. 21

Наименьшее значение эта сумма принимает при $x = y = z = \frac{a}{2}$. Поэтому K, P, T – середины скрещивающихся ребер куба.

Рассмотренная выше прямоугольная система координат широко применяется в прикладных науках и на производстве.

В трех взаимно перпендикулярных направлениях (по осям координат) перемещаются рабочие узлы многих современных станков (рис. 21).

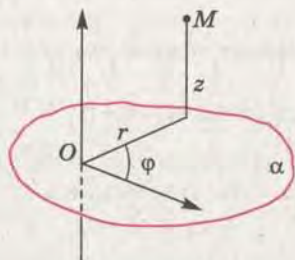


Рис. 22

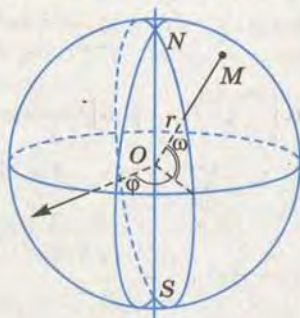


Рис. 23

Существуют координатно-расточные и другие станки с числовым программным управлением. Конечно, прямоугольная система координат – самая простая. В прикладных науках и технике используются цилиндрическая, сферическая и другие системы координат. В цилиндрической системе каждая точка пространства задается двумя расстояниями r и z и углом φ (рис. 22). В сферической – двумя углами φ и ω и расстоянием r (рис. 23). Пример сферической системы координат – сетка параллелей и меридианов на глобусе (тут r постоянное). Конструкторы и наладчики различных роботов и роторных механизмов обычно используют цилиндрическую систему координат.

Известно, что компьютеры выдают разные траектории, графики, схемы и другие геометрические образы. Осуществляется это благодаря вычислениям координат их точек.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем суть метода координат?
2. Что такое тетраэдр; центроид тетраэдра?
3. Что такое средняя линия тетраэдра?
4. Докажите, что центроид тетраэдра – середина каждой его средней линии.
5. Какие существуют системы координат в пространстве?



Выполним вместе

1. Плоскость проходит через точки M , N и K куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, причем $M \in AA_1$, $N \in B_1 C_1$, $K \in CD$, $AM : MA_1 = 1 : 2$, $B_1 N : NC_1 = 3 : 2$, $CK = KD$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AD ?

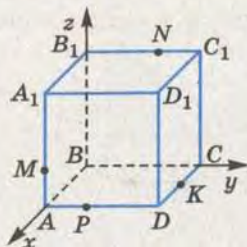


Рис. 24

РЕШЕНИЕ. Расположим систему координат относительно данного куба, как показано на рисунке 24, и обозначим $AB = 1$. Данные точки имеют такие координаты:

$$M\left(1; 0; \frac{1}{3}\right), N\left(0; \frac{3}{5}; 1\right), K\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right).$$

Плоскость, проходящую через эти точки, можно задать уравнением:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Если подставим в это уравнение координаты названных точек, получим систему

$$\begin{cases} a + \frac{1}{3}c + d = 0, \\ \frac{3}{5}b + c + d = 0, \\ \frac{1}{2}a + b + d = 0. \end{cases}$$

Отсюда $a = 26$, $b = 20$, $c = 21$, $d = -33$. Следовательно, секущей плоскости соответствует уравнение $26x + 20y + 21z - 33 = 0$.

Точка $P(1; y; 0)$ лежит на секущей плоскости. Следовательно, $26 + 20y - 33 = 0$, откуда $y = \frac{7}{20}$. Если $AP = \frac{7}{20}$, то

$$PD = \frac{13}{20}.$$

ОТВЕТ. $AP : PD = 7 : 13$.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



119. Назовите координаты вершин куба, изображенного на рисунке 25.
120. Назовите координаты вершин треугольной призмы, изображенной на рисунке 26.
121. Вершина треугольной пирамиды лежит в начале координат, а вершины основания лежат на координатных осях в точках, удаленных от начала координат на a . Назовите координаты вершин пирамиды.
122. Чему равно ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$, если $A(2; 0; 0)$, $A_1(2; 0; 4)$? Может ли одна из вершин этого куба находиться в начале координат?

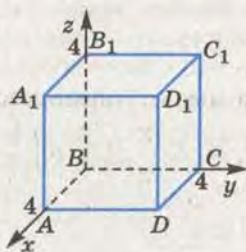


Рис. 25

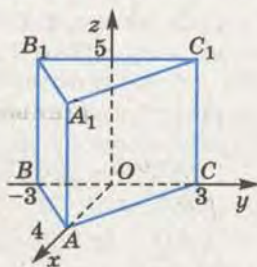


Рис. 26

123. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ даны координаты вершин $A(1; -1; 0)$, $B(1; 1; 0)$. Укажите координаты вершин A_1 и D_1 .

А

124. а) Выберите прямоугольную систему координат и изобразите куб, заданный системой неравенств: $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4$.
б) Задайте системой неравенств другой куб с ребром 4.
125. Задайте системой неравенств прямоугольный параллелепипед с ребрами 3, 3 и 6.
126. Ребро куба равно 1. Запишите координаты вершин куба, для которого:
а) одна из вершин куба лежит в начале координат;
б) оси Ox и Oy являются осями симметрии нижнего основания куба, перпендикулярными к его сторонам;
в) диагонали основания куба лежат на осях Ox и Oy .
127. Найдите координаты вершины D правильного тетраэдра $ABCD$ и расстояние от нее к плоскости ABC , если $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; 6)$.
128. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AD = a$, $AA_1 = 2a$. E, F, M, N – середины $A_1 D_1$, $D_1 C$, CD и $A_1 D$ соответственно. Докажите, что отрезки EM и FN пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Б

129. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = 2$, $BC = 4$, $AA_1 = 6$. В каком соотношении плоскость $AB_1 C$ делит отрезок BK , где K – середина DD_1 ?
130. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и точки M и N на ребрах AA_1 и CC_1 . Проходит ли плоскость $MB_1 N$ через вершину D , если:
а) $AM = MA_1$, $CN = NC_1$; б) $AM : MA_1 = 3 : 1$, $CN : NC_1 = 1 : 3$?
131. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найдите радиус сферы, проходящей через точки A , A_1 и центры граней с общим ребром CC_1 .

132. Ребро куба равно a . Найдите радиус сферы, проходящей через одну из его вершин и середины трех ребер, содержащих эту вершину.
133. Сфера проходит через середины трех ребер куба, содержащих одну вершину, и через вершину, противоположную первой. Найдите радиус сферы, если ребро куба равно 20.
134. Четыре точки A, B, C, D расположены в пространстве так, что $AD \perp BC$. Докажите, что $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.
135. Найдите геометрическое место точек пространства, сумма квадратов расстояний от которых до концов данного отрезка постоянна.
136. Найдите на грани куба точку, сумма квадратов расстояний от которой до всех вершин противоположной грани наименьшая. Чему равна эта сумма, если длина ребра куба a ?
137. В экватор сферы вписан квадрат. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки сферы до всех вершин квадрата постоянная для данного квадрата (не зависит от выбора точки на сфере).
138. Все вершины куба лежат на сфере. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки сферы до вершин куба постоянная для данного куба.
139. В одну из граней куба вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки этой окружности до вершин противоположной грани куба постоянная.
140. $AB_1C_1D_1$ – куб, M – середина ребра AA_1 , K – центр грани CC_1D_1D . В каком отношении плоскость, проходящая через точки B_1, M и K , делит ребра CC_1 и DD_1 ?
141. Дан куб $AB_1C_1D_1$ и точки M, N, P на отрезках AB_1, DC, A_1C_1 соответственно. В каком отношении плоскость MNP делит отрезок D_1C_1 , если $AM : MB_1 = 1 : 3, DN : DC = 1 : 2, A_1P : A_1C_1 = 2 : 3$?

В

142. На каком расстоянии от основания куба расположен параллельный основанию отрезок длиной b , если один его конец лежит на диагонали куба, а другой – на скрещивающейся с ней диагонали боковой грани? Длина ребра куба равна a .
143. $AB_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = BC = a, AA_1 = 2a$. Найдите длину отрезка MK , параллельного грани ABB_1A_1 , если $M \in AD_1, K \in DB_1, AM : AD_1 = 2 : 3$.

144. Найдите расстояние от вершины D тетраэдра $ABCD$ до его грани ABC , если $AC = CB = 10$, $AB = 12$, $DA = 7$, $DB = \sqrt{145}$, $DC = \sqrt{29}$.
145. Найдите длину ребра AD тетраэдра $ABCD$, если $AB = AC = BC = 10$, $DB = 2\sqrt{29}$, $DC = \sqrt{46}$ и расстояние от вершины D до плоскости грани ABC равно 5.



Упражнения для повторения

146. Напишите уравнение фигуры, состоящей из точек, равноудаленных от точек $A(-2; 1; -1)$ и $B(4; -1; 3)$.
147. Диагонали ромба 30 см и 40 см и пересекаются в точке O . Длина перпендикуляра OM к плоскости ромба равна 5 см. Найдите расстояние от точки M до сторон ромба.
148. Начертите два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$.



§5 ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Величины бывают *скалярные* и *векторные*. Значения скалярных величин – числа, значения векторных величин – *векторы*. Векторы на плоскости рассматривали в предыдущих классах. Теперь выучим важнейшие свойства векторов в пространстве. Как и раньше, будем изображать их направленными отрезками.

Известный геометр, академик А.Д. Александров разъясняет: «Часто векторами называют сами направленные отрезки. Это не совсем точно: предмет и его изображение не одно и то же. Но в разговорном языке, показывая, например, слона на фотографии, говорят: “Это слон”, и никто не говорит: “Это изображение слона”. Так и в геометрии с векторами: рисуя направленный отрезок, говорят, что нарисовали вектор, хотя это только изображение вектора».

Вместо «вектор, изображенный направленным отрезком $\overline{AB}$ » будем писать и говорить «вектор $\overrightarrow{AB}$ ». Все же нельзя забывать, что направленными отрезками изображают не только векторы. А изображать векторы можно не только направленными отрезками.



Векторы часто задают с помощью координат. *Координатами вектора* $\overline{AB}$, начало которого $A(x_1; y_1; z_1)$, а конец $B(x_2; y_2; z_2)$, называют числа $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$. Записывают так такой вектор, обозначая его координаты:

$$\overline{AB} = (x; y; z) \text{ или } \vec{a} = (x; y; z).$$

Например, если точки $A(3; 0; 2)$ и $B(0; 4; 3)$ – начало и конец направленного отрезка AB (рис. 27), то $x = 0 - 3 = -3$, $y = 4 - 0 = 4$, $z = 3 - 2 = 1$.

Следовательно, направленному отрезку $\overline{AB}$ соответствует вектор $\vec{a} = (-3; 4; 1)$. Числа -3 , 4 и 1 – координаты этого вектора.

Два вектора называются *равными*, если их соответствующие координаты равны. Равным векторам соответствуют равные по длине и одинаково направленные отрезки и наоборот.

Координаты вектора могут быть любыми действительными числами. Если все координаты вектора – нули, то его называют *нулевым вектором* и обозначают символом $\vec{0}$. Это единственный вектор, которому не соответствует направленный отрезок и который не имеет определенного направления.

Если O – начало координат, а числа a_1, a_2, a_3 – координаты точки A , то эти же числа являются и координатами вектора $\overline{OA}$ (рис. 28). Вектор $\overline{OA}$ можно изобразить и направленным отрезком KP , где $K(k_1; k_2; k_3)$ – любая точка пространства, а P – точка с координатами $k_1 + a_1, k_2 + a_2, k_3 + a_3$. Ведь $k_1 + a_1 - k_1 = a_1, k_2 + a_2 - k_2 = a_2, k_3 + a_3 - k_3 = a_3$.

Говорят: любой вектор можно отложить от любой точки пространства.

Длиной, или модулем, вектора называют длину направленного отрезка, изображающего его. Обозначают длину вектора $\vec{a}$ символом $|\vec{a}|$. Длину вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ можно выразить через его координаты (см. рис. 28). Стороны прямоугольника OEA_zF равны x и y , поэтому $OA_z^2 = x^2 + y^2$. В прямоугольном $\triangle OA_zA$ катет $A_zA = z$, следовательно, $OA^2 = OA_z^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

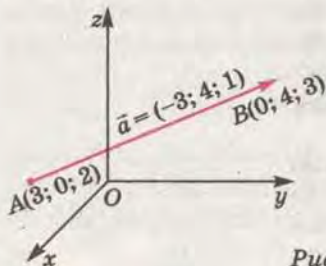


Рис. 27



Рис. 28

Отсюда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Длина любого ненулевого вектора — число положительное. Длина нулевого вектора равна нулю.

Векторы, которым соответствуют параллельные направленные отрезки, называют *коллинеарными*. Векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ коллинеарны только тогда, когда точки O , A и B лежат на одной прямой. Коллинеарные векторы бывают сонаправленными или противоположно направленными.

Три вектора называют *компланарными*, если соответствующие им направленные отрезки расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ компланарны только при условии, что точки O , A , B и C лежат в одной плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ. В геометрии рассматриваются только *свободные* векторы. Физики чаще используют *приложенные* (связанные) векторы, определяемые не только длиной и направлением, но и точкой приложения. Хотя они имеют много общего со свободными векторами, все же существенно от них отличаются. Например, чтобы решить задачу о действии сил, приложенных к пружине (рис. 29), свободные векторы не подходят. Ведь в таких задачах не все равно, в каких точках прикладываются силы.

В картографии векторами называют любые отрезки, даже криволинейные, показывающие направления морских течений, движения армии и т. п. Такие «векторы» нельзя ни складывать, ни умножать.

Дальше будем рассматривать лишь свободные векторы, называя их просто векторами.

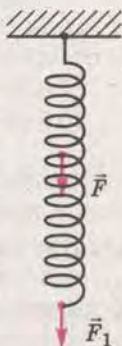


Рис. 29

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие величины называют векторными?
2. Что такое координаты вектора?
3. Какие векторы называют нулевыми? Как их обозначают?
4. Что такое модуль вектора?
5. Какие векторы называют коллинеарными?
6. Какие векторы называются компланарными?
7. Какие векторы называют свободными, а какие — прикладными?



Выполним вместе

1. Найдите координаты вектора $\vec{a} = (a; 2a; -a)$, если его длина $\sqrt{54}$.

РЕШЕНИЕ. $\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{54}$, $6a^2 = 54$, $a^2 = 9$, откуда $a_1 = 3$, $a_2 = -3$.

ОТВЕТ. $\vec{a} = (3; 6; -3)$ или $\vec{a} = (-3; -6; 3)$.

2. Докажите, что при любых значениях $a_2, a_3, b_2, b_3, c_2, c_3$ векторы $\vec{a} = (0; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (0; b_2; b_3)$ и $\vec{c} = (0; c_2; c_3)$ компланарны.

РЕШЕНИЕ. Первые координаты данных векторов – нули. Поэтому, если отложить эти векторы от начала координат, все соответствующие им направленные отрезки расположатся в плоскости yz . Следовательно, данные векторы компланарны.

3. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(-2; 3; 5)$, $B(-1; 4; 2)$, $C(4; 1; -3)$.

РЕШЕНИЕ. Если $ABCD$ параллелограмм, то $\overline{AB} = \overline{DC}$. Пусть точка D имеет координаты $D(x; y; z)$. Тогда $\overline{AB} = (1; 1; -3)$ и $\overline{DC} = (4 - x; 1 - y; -3 - z)$. Поскольку равные

векторы имеют равные координаты, то

$$\begin{cases} 4 - x = 1, \\ 1 - y = 1, \\ -3 - z = -3. \end{cases}$$

Отсюда

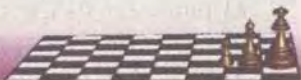
$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ. $D(3; 0; 0)$.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



149. Назовите координаты векторов, изображенных на рисунке 30.
150. Даны точки $A(1; 1; 1)$, $B(-7; 0; 2)$, $C(3; -1; 4)$, $O(0; 0; 0)$.
Укажите координаты векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{AB}$.
151. Какие координаты имеет вектор $\overline{MN}$, если $\overline{NM} = (2; -1; 4)$?

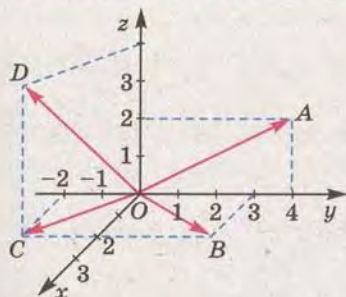


Рис. 30

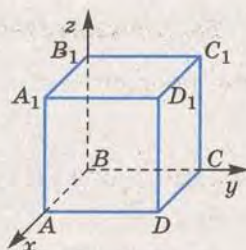


Рис. 31

152. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 31). Назовите векторы:

- равные векторам $\overline{AB}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{AC}$;
- противоположные векторам $\overline{A_1D_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{BD}$;
- коллинеарные с векторами $\overline{BA}$, $\overline{AA_1}$;
- компланарные с векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{A_1C}$.

153. Известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Следует ли из этого, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны?

154. Известно, что $\vec{a} = \vec{b}$. Всегда ли $|\vec{a}| = |\vec{b}|$?

155. В черчении направленными отрезками (прямолинейными стрелками) обозначают радиусы окружностей и дуг (рис. 32). Изображают ли такие направленные отрезки векторы?

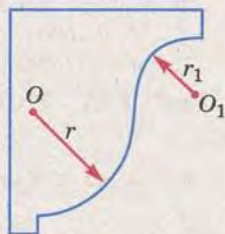


Рис. 32

А

156. Точки A, B, C, D, E, F – вершины заданного в пространстве правильного шестиугольника. Задайте с их помощью пару векторов:

- равных; б) противоположно направленных;
- сонаправленных, но не равных.

157. Точка B – середина отрезка AC , а C – середина отрезка BD . Равны ли между собой векторы:

- $\overline{CA}$ и $\overline{DB}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$?

158. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если:

- $A(1; 2; 3)$, $B(3; 7; 6)$;
- $A(-3; 2; 1)$, $B(1; -4; 3)$;

в) $A(a; -a; 3a)$, $B(2a; -3a; -a)$.

159. Найдите длины векторов $\vec{m} = (1; -1; 1)$, $\vec{n} = (0; 2; -4)$,
 $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; 5)$, $\vec{c} = (-1; 4; 8)$, $\vec{d} = (0; 1; -3)$.
160. Найдите координаты и длину вектора $\overline{MN}$, если:
 а) $M(4; -1; 3)$, $N(1; -1; -1)$;
 б) $M(19; 4; 35)$, $N(20; 3; 40)$;
 в) $M(2a; a; -4a)$, $N(3a; 4a; -5a)$.
161. Даны точки $A(-1; 3; -2)$, $B(4; 2; 1)$, $C(-3; -1; 2)$, $D(2; -2; 5)$.
 Найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$.
 Есть ли среди этих векторов равные векторы?
162. Найдите координаты начала направленного отрезка $\overline{AB}$, соответствующего вектору $\vec{a} = (3; 4; 2)$, если его конец — точка $B(-5; 4; 1)$.
- * 163. Найдите координаты конца направленного отрезка $\overline{CB}$, соответствующего вектору $\vec{c} = (-1; 3; -2)$, если его начало — точка $C(-2; -1; -3)$.
164. Даны точки $M(1; 3; 4)$, $N(7; 5; 1)$, $K(5; -1; 4)$. Найдите координаты векторов $\overline{MN}$, $\overline{NK}$, $\overline{MK}$ и их модули. Установите вид $\triangle MNK$ и найдите его периметр и площадь.
165. Будет ли четырехугольник $ABCD$ параллелограммом, если:
 а) $A(1; -2; 3)$, $B(4; -2; -1)$, $C(-2; 2; -3)$, $D(-5; 2; 1)$;
 б) $A(-2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 5)$, $C(4; 2; -3)$, $D(3; -1; -7)$?
166. Длины векторов $\vec{a} = (2; 1; 3)$ и $\vec{b} = (-1; x; 2)$ равны. Найдите x .
167. Как относятся длины ненулевых векторов $\vec{a} = (a; b; c)$ и $\vec{n} = (2a; 2b; 2c)$?
168. $ABCA_1B_1C_1D_1$ — куб.
 а) Коллинеарны ли векторы:
 1) $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{AB}$; 2) $\overline{AB}$ и $\overline{C_1D_1}$; 3) $\overline{BC_1}$ и $\overline{CD_1}$; 4) $\overline{AD_1}$ и $\overline{BA_1}$?
 б) Напишите тройку компланарных векторов.
169. В прямоугольной системе координат обозначьте векторы
 $\vec{a} = (2; 4; 0)$, $\vec{b} = (0; 3; 1)$, $\vec{c} = (0; 0; 2)$, $\vec{d} = (2; 2; 3)$.

170. В прямоугольной системе координат расположите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 1, как на рисунке 33. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{B_1C}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{BB_1}$.

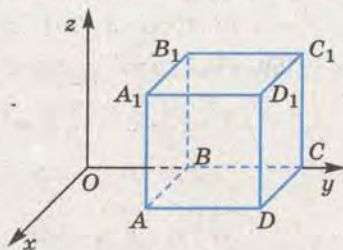


Рис. 33

171. Найдите координаты вектора, если его длина $2\sqrt{2}$, а все координаты равны.
172. Найдите координаты вектора, являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии, если его длина равна $2\sqrt{14}$, а ордината -4 .
173. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если:
 а) $A(1; -3; 1)$, $B(2; 4; -6)$, $C(3; -1; 1)$;
 б) $A(2; -2; 1)$, $B(4; 0; -1)$, $C(1; 2; -3)$.
174. Даны четырехугольники $ABCD$ и $MNPK$. Какой из четырехугольников является ромбом, а какой — квадратом, если:
 $A(6; 7; 8)$, $B(8; 2; 6)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 8; 4)$ и
 $M(3; 5; 2)$, $N(7; 1; 2)$, $P(3; -3; 2)$, $K(-1; 1; 2)$?
175. M , N , K — середины сторон AB , BC , AC $\triangle ABC$. Найдите координаты вектора $\overline{NK}$, если $A(-1; 3; -5)$, $M(3; 2; -6)$.
176. При каком значении a длина вектора $\vec{m}$ равна $\sqrt{21}$, если:
 а) $\vec{m} = (4; a; 2)$; б) $\vec{m} = (a-1; 1; 4)$;
 в) $\vec{m} = (a; 1; a+2)$; г) $\vec{m} = (a-1; a-2; a+1)$?
177. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если:
 а) $\vec{a} = (1; -2; m^2)$, $\vec{b} = (1; -2; m)$;
 б) $\vec{a} = (m-1; 9; 2m)$, $\vec{b} = (-4; m^2; -6)$;
 в) $\vec{a} = (m^2 - m; m+3; 2m)$, $\vec{b} = (2; 2m+1; m^2)$;
 г) $\vec{a} = (m-3; m^2; -2)$, $\vec{b} = (-2m; 2m-1; -2)$?
178. Коллинеарны ли векторы:
 а) $\vec{a} = (1; 1; 0)$ и $\vec{b} = (1; 1; 2)$;
 б) $\vec{k} = (0; 1; 0)$ и $\vec{p} = (0; -2; 0)$?

179. $ABCD$ – тетраэдр, K , P , T – середины его ребер AB , AC и AD . Компланарны ли векторы:
 а) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{KP}$; б) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KT}$ и $\overrightarrow{CB}$?
180. Компланарны ли векторы $\vec{a} = (3; 2; 0)$; $\vec{b} = (6; 3; 0)$ и $\vec{c} = (8; 1; 0)$?
181. $ABCD$ – произвольный тетраэдр, K и M – середины его ребер AC и BD . Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KM}$ компланарны.



Упражнения для повторения

182. Даны векторы $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (4; -5)$. Найдите:
 а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; г) $3\vec{b} - 2\vec{a}$.
183. При каком значении m векторы $\vec{a} = (1; m)$ и $\vec{b} = (-2; 4)$:
 а) коллинеарны; б) перпендикулярны?
184. Прямая b пересекает прямую a , параллельную плоскости α . Каким может быть взаимное расположение прямой b и плоскости α ?



ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

Действия над векторами в пространстве обозначаются аналогично тому, как они обозначались для векторов на плоскости.

Суммой векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ называют вектор

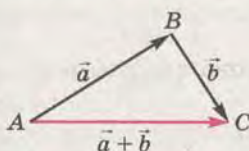
$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

Свойства суммы векторов. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

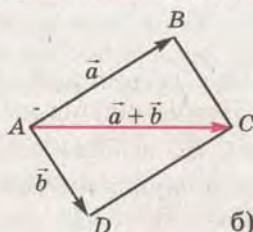
- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – переместительный закон сложения;
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ – сочетательный закон сложения.

Чтобы доказать эти свойства, достаточно сравнить соответствующие координаты левой и правой частей каждого векторного равенства.

Геометрически сумму двух векторов пространства можно найти, пользуясь *правилом треугольника*: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 34, а). Ведь для любых трех точек $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ и $C(x_3; y_3; z_3)$: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2; y_3 - y_2; z_3 - z_2)$.



а)



б)

Рис. 34

Поэтому

$$\overline{AB} + \overline{BC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1) = \overline{AC}.$$

Можно пользоваться и *правилом параллелограмма*: если $ABCD$ – параллелограмм, то $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ (рис. 34, б).

Сумму трех некопланарных векторов можно найти по *правилу параллелепипеда*: если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед (рис. 35), то $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1} = \overline{AC_1}$.

Ведь по правилу параллелограмма $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{AC} + \overline{AA_1} = \overline{AC_1}$.

Сумму нескольких векторов можно найти по *правилу многоугольника*. Например, как бы не были расположены в пространстве точки A, B, C, D, E , всегда $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE}$.

Два вектора, сумма которых равна нулевому вектору, называют *противоположными*. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ направлены противоположно друг другу. При любых значениях x, y, z векторы $\vec{a} = (x; y; z)$ и $\vec{a}_1 = (-x; -y; -z)$ противоположны.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, дающий в сумме с вектором $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$. Из этого определения следует, что всегда $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$. И если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

Умножать на число вектор пространства можно так же, как и вектор плоскости. Если $\vec{a} = (x; y; z)$, то $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы равенства:

1) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$, где λ – число;

2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$, где λ, μ – числа;

3) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, где λ – число.

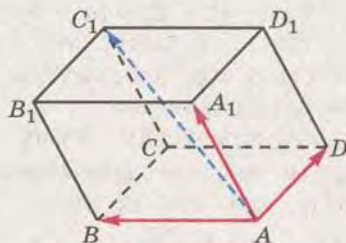


Рис. 35

Эти свойства непосредственно следуют из определения умножения вектора на число.

При умножении вектора на число получаем вектор, коллинеарный данному, т. е. если $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. И наоборот, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то, обозначив отношение их длин через λ ($\lambda > 0$), получим, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, если векторы сонаправленные, и $\vec{b} = -\lambda \vec{a}$, если векторы противоположно направленные.

Поэтому имеет место такой **признак коллинеарности двух векторов**: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, или векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Компланарность векторов. Несколько векторов компланарны, если соответствующие им направленные отрезки параллельны некоторой плоскости. Три вектора, среди которых есть по крайней мере один нулевой, компланарны.

Из 9-го класса известно, что любой вектор $\vec{c}$ плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. существует единственная упорядоченная пара чисел α, β таких, что $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$. Следовательно, если вектор $\vec{c}$ компланарен с неколлинеарными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то имеет место равенство $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$. И наоборот, если для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ выполняется равенство $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Разложение вектора. Векторы $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ называют **ортами**. Всегда, если $\vec{a} = (x; y; z)$, то $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

Такое представление вектора в виде суммы называют **разложением данного вектора по ортам** (рис. 36). Оно всегда возможно и однозначно. Если даны три некопланарных вектора $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$, то любой вектор $\vec{OM}$ можно представить, причем единственным способом, в виде

$$\vec{OM} = a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC},$$

где a, b, c — некоторые действительные числа.



Рис. 36



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие действия можно выполнять над векторами в пространстве?
2. Что такое сумма векторов?
3. Как находят сумму векторов по правилу треугольника; параллелограмма; параллелепипеда?
4. Чему равна разность векторов $\vec{a} = (a; a; a)$ и $\vec{b} = (b; b; b)$?
5. Что такое орты?
6. Что значит разложить данный вектор по ортам?



Выполним вместе

1. Пусть K и P – середины отрезков AB и CD , которые лежат на скрещивающихся прямых, а O – середина отрезка KP . Докажите, что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

РЕШЕНИЕ. Векторы $\vec{OK}$ и $\vec{OP}$ противоположны (рис. 37). Следовательно, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2 \cdot \vec{OK} + 2 \cdot \vec{OP} = 2(\vec{OK} + \vec{OP}) = \vec{0}$.

2. M – середина ребра BC тетраэдра $PABC$, O – середина AM . Выразите вектор $\vec{PO}$ через векторы $\vec{PA} = \vec{a}$, $\vec{PB} = \vec{b}$, $\vec{PC} = \vec{c}$ (рис. 38).

РЕШЕНИЕ. По правилу параллелограмма (построенного на отрезках PB и PC) имеем $2 \cdot \vec{PM} = \vec{PB} + \vec{PC}$, откуда $\vec{PM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. Аналогично находим:

$$\vec{PO} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PM}) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})\right) = \frac{1}{4}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

3. Докажите, что когда точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = m : n$, а X – любая точка пространства, то

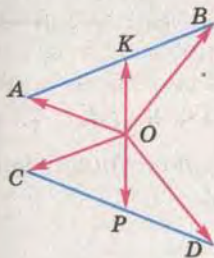


Рис. 37

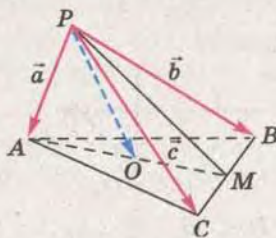


Рис. 38

$$\overline{XM} = \frac{n}{m+n} \overline{XA} + \frac{m}{m+n} \overline{XB}.$$

РЕШЕНИЕ. $\overline{XM} + \overline{MA} = \overline{XA}$, $\overline{XM} + \overline{MB} = \overline{XB}$.

Следовательно, $n\overline{XM} + n\overline{MA} = n\overline{XA}$, $m\overline{XM} + m\overline{MB} = m\overline{XB}$.

Если сложить почленно эти векторные равенства и учесть, что $n\overline{MA} + m\overline{MB} = \vec{0}$, получим $(m+n)\overline{XM} = n\overline{XA} + m\overline{XB}$, откуда $\overline{XM} = \frac{n}{m+n} \overline{XA} + \frac{m}{m+n} \overline{XB}$.

4. Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a} = (1; 3; -2)$, $\vec{b} = (-2; -6; 4)$, $\vec{c} = (0,5; 1,5; -1)$;

б) $\vec{a} = (-1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 5; 3)$, $\vec{c} = (4; -5; -1)$?

РЕШЕНИЕ. а) Соответствующие координаты данных векторов пропорциональны, поэтому эти векторы коллинеарны, а следовательно, компланарны. Они или лежат в одной плоскости, или параллельны одной плоскости.

б) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, поскольку их соответствующие координаты не пропорциональны. Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарными. Если такое разложение невозможно, векторы не будут компланарными. Поэтому установим, существуют ли такие числа α и β , что $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, т. е. имеет ли решения система уравнений

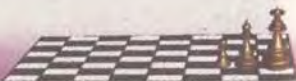
$$\begin{cases} -\alpha - 2\beta = 4, \\ 2\alpha + 5\beta = -5, \\ \alpha + 3\beta = -1. \end{cases}$$

Суммируя первое и третье уравнение, получим, что $\beta = 3$, тогда $\alpha = -10$. Следовательно, $\vec{c} = -10\vec{a} + 3\vec{b}$. Это значит, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарны.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



185. Найдите сумму и разность векторов:

а) $\vec{a} = (-2; 0; 3)$ и $\vec{b} = (1; 1; 0)$;

б) $\vec{c} = (-2; -1; 4)$ и $\vec{d} = (3; 1; -1)$.

186. Даны векторы $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (-4; 1; 2)$. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{b} - \vec{a}$; $\vec{a} + \vec{a}$; $\vec{b} - \vec{b}$.

187. Умножьте вектор $\vec{m} = (-6; 4; 0)$ на: 2 ; -3 ; $0,5$; $-\frac{1}{4}$.

188. Коллинеарны ли векторы:

- а) $\vec{a} = (1; 1; 2)$ и $\vec{b} = (2; 2; 4)$; б) $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (3; 2; 1)$;
 в) $\vec{a} = (2; 4; 7)$ и $\vec{b} = (1; 2; 3,5)$?

189. Найдите сумму векторов: а) $\vec{AX} + \vec{XB}$; б) $\vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PK}$.

190. Найдите разность векторов: а) $\vec{XA} - \vec{XT}$; б) $\vec{MA} - \vec{MD}$.

A

191. Найдите сумму векторов:

- а) $\vec{a} = (3; 1; -2)$, $\vec{b} = (3; -2; 5)$;
 б) $\vec{a} = (-2; 4; 11)$, $\vec{b} = (2; 6; 21)$;
 в) $\vec{a} = (-3, 2; 4, 6; 3)$, $\vec{b} = (-0, 2; 2; 3, 5)$;
 г) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}; 0, 3; \frac{2}{5}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{3}{4}\right)$.

192. Найдите сумму векторов $\vec{x} = \left(0; 3; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{y} = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ и $\vec{z} = \left(-4; \frac{1}{2}; 2\right)$.

193. Найдите сумму векторов:

- а) $\vec{CX}$ и $\vec{XP}$; б) $\vec{BT}$ и $\vec{AB}$; в) $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$.

194. $ABCD$ – тетраэдр. Чему равен $\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB}$?

195. Докажите, что когда O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

196. Докажите, что когда O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, то $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$.

197. Найдите разность $\vec{a} - \vec{b}$, если:

- а) $\vec{a} = (4; 1; 5)$, $\vec{b} = (3; 5; -1)$; б) $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = (3; 4; -2)$.

198. Пусть O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Докажите, что: а) $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{OB}$; б) $\vec{AB} - \vec{DC} = \vec{AO}$.

199. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$, у которого $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AA_1} = \vec{c}$. Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\vec{AD_1}$, $\vec{AC}$, $\vec{AC_1}$, $\vec{A_1C}$.

200. Умножьте вектор $\vec{a} = (3; -4; 2)$ на: $3; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; 0$.

201. Дан вектор $\vec{p} = (6; -8; 0)$. Найдите координаты вектора:

- а) $2\vec{p}$; б) $-\vec{p}$; в) $-1,5\vec{p}$; г) $\frac{1}{2}\vec{p}$; д) $0 \cdot \vec{p}$.

202. Даны векторы $\vec{a} = (-1; 3; 7)$ и $\vec{b} = (6; 2; -8)$. Найдите координаты вектора:

- а) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $0,5\vec{a} - 1,5\vec{b}$.

203. Найдите длины векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (2; 0; -3)$, $\vec{b} = (5; -1; 2)$.
204. Разложите по ортам вектор:
 а) $\vec{a} = (3; -4; 7)$; б) $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; -1\right)$.
205. Найдите координаты вектора $2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.
206. Найдите числа a, b, c , если $\vec{m} = (2; 3; 4) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$.
207. Коллинеарны ли векторы $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $\vec{a} = (2; -2; 4)$, $\vec{b} = (-1; 3; 2)$, $\vec{c} = (-8; 16; 0)$?
208. При каких значениях k векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны:
 а) $\vec{a} = (2; k; -3)$, $\vec{b} = (-4; 10; 6)$;
 б) $\vec{a} = (k; -2; -1)$, $\vec{b} = (-3; 6; 3k)$?
209. Докажите, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, если:
 а) $\vec{a} = (-2; 4; 6)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$, $\vec{c} = (1; -2; -3)$;
 б) $\vec{a} = (1; 2; 5)$, $\vec{b} = (0,3; 0,2; 1)$, $\vec{c} = (-3; -2; -10)$.
210. Даны точки $A(-3; 2; 5)$, $B(4; -1; 2)$, $C(1; 0; -2)$, $D(-2; 6; 1)$.
 Найдите координаты векторов:
 $\overline{AB} + \overline{CD}$; $\overline{AC} + \overline{BD}$; $\overline{AD} + \overline{BC}$; $\overline{BA} + \overline{BD}$; $\overline{DA} + \overline{DC}$.
211. Даны векторы $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; -3; -1)$, $\vec{c} = (-1; 5; 7)$.
 Найдите: $|\vec{a} + \vec{b}|$; $|\vec{a} + \vec{c}|$; $|2\vec{a} + 3\vec{c}|$; $|\vec{b} - 2\vec{a}|$; $|2\vec{b} - \vec{c}|$.
212. Докажите, что когда O — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$.
213. Найдите числа x, y, z , если $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = (x; 2; z)$, $\vec{b} = (-3; 2y; 3z - 1)$ и:
 а) $\vec{p} = (1; -5; 3)$; б) $\vec{p} = (3; -7; 12)$; в) $\vec{p} = (-1; 6; -9)$.
214. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, сонаправленного с вектором $\vec{p}$, если $\vec{p} = (2; -2; -1)$ и $|\vec{a}| = 6$.
215. Найдите координаты единичного вектора, противоположно направленного к вектору $\vec{c} = (1; -3; 2)$.
216. Лежат ли точки A, B, C на одной прямой, если $\overline{OA} = (-1; 2; -6)$, $\overline{OB} = (2; -4; 3)$, $\overline{OC} = (2; -4; 6)$?
217. Найдите координаты точки P , лежащей на прямой MN , если $M(4; -1; 2)$, $N(3; 2; 1)$ и $|\overline{MP}| = 2\sqrt{11}$.
218. Найдите все значения a , при которых векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, если:
 а) $\vec{m} = (-1; 4; -2)$, $\vec{n} = (2; a; 4)$;

$$б) \vec{m} = (a + 1; 2; a), \vec{n} = (1; a; 2);$$

$$в) \vec{m} = (3; 5 - a; a), \vec{n} = (5 + a; 7a + 1; 2).$$

219. При каких значениях a и b точки A, B, C принадлежат одной прямой, если $\vec{AB} = (-1; a; b)$, $\vec{AC} = (3; 6; -1)$?



220. Компланарны ли векторы:

$$а) \vec{a} = (-2; 1; 1), \vec{b} = (1; -1; 2), \vec{c} = (0; 2; -1);$$

$$б) \vec{a} = (1; -2; -1), \vec{b} = (3; -4; 2), \vec{c} = (-1; 4; 6)?$$

221. Векторы $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ – некопланарны. Докажите, что компланарными являются векторы $\vec{a} = -2\vec{m} + \vec{n} - 2\vec{p}$, $\vec{b} = -3\vec{m} + 4,5\vec{n} - 7\vec{p}$, $\vec{c} = \vec{m} - 2\vec{n} + 3\vec{p}$.

222. Даны векторы $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (0; 3; 1)$, $\vec{c} = (2; 5; 2)$ и $\vec{m} = (4; 0; -7)$. Найдите числа a, b и c такие, чтобы выполнялось равенство $\vec{m} = a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}$.

- 223*. Докажите, что каждый отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, проходит через центроид тетраэдра и делится им в отношении 3 : 1.

- 224*. Докажите, что когда O – центр правильного многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$, то $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$.



Упражнения для повторения

225. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = (-1; 4)$ и $\vec{b} = (2; 5)$.
226. При каком значении a векторы $\vec{m} = (-1; a)$ и $\vec{n} = (9; a)$ перпендикулярны?
227. Точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. Через точку D проведите прямую, параллельную плоскости ABC .



СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Углом между двумя ненулевыми векторами называют угол между соответствующими им направленными отрезками, выходящими из одной точки.

От выбора этой точки мера рассматриваемого угла не зависит. Считают, что угол между противоположно направленными векторами равен 180° , а между сонаправленными – 0° .

Теперь введем понятие скалярного произведения двух векторов пространства.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ , то их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.

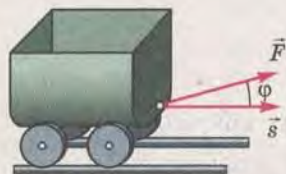


Рис. 39

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример применения скалярного произведения векторов известен из физики. Механическая работа A , которую выполняет постоянная сила $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ (рис. 39), равна скалярному произведению данных векторов:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi.$$

Применяется это понятие и в геометрии. Из определения скалярного произведения векторов следует, что отрезки AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ равно нулю (признак перпендикулярности векторов). Важны и другие последствия. Чтобы пользоваться ими, надо знать свойства скалярного произведения векторов.

Теорема 5. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ равно $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отложим данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от начала координат (рис. 40). Им соответствуют направленные отрезки $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, концы которых $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Если данные векторы неколлинеарны, то ABO – треугольник. По теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{откуда } OA \cdot OB \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2). \quad (*)$$

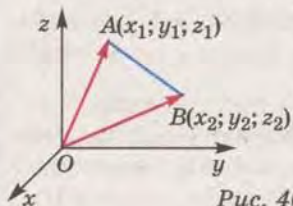


Рис. 40

Выразим квадраты длин векторов $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{AB}$ через их координаты:

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$OB^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Поэтому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = OA \cdot OB \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \right. \\ \left. - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Доказанное соотношение справедливо и для углов φ , которые равны 0° или 180° (рис. 41). Ведь в первом из этих случаев

$$AB^2 = |OA - OB|^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 0^\circ,$$

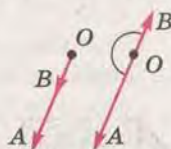


Рис. 41

а во втором

$$AB^2 = (OA + OB)^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 180^\circ.$$

Следовательно, доказываемая теорема правильна и для коллинеарных векторов. Всегда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

ПРИМЕР. Если $\vec{a} = (2; -1; 4)$, $\vec{b} = (1; 0; 3)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 14.$$

Какими бы не были векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, всегда $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ и $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Истинность этих свойств следует из тождеств:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1; \\ (x_1 + x_2) x_3 + (y_1 + y_2) y_3 + (z_1 + z_2) z_3 = \\ = (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3) + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3).$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ обозначают $\vec{a}^2$ и называют скалярным квадратом вектора $\vec{a}$. По определению скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$, откуда следует, что $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Доказанные свойства дают возможность сравнительно легко выполнять преобразование векторных выражений — по тем же правилам, по которым выполняют тождественные преобразования алгебраических выражений. С другой стороны, зная скалярное произведение двух векторов и их длины, можно легко вычислить косинус угла между ними. А это дает возможность применять скалярное произведение векторов во время решения многих задач.

ЗАМЕЧАНИЕ. Почему говорят скалярное произведение векторов, а не произведение векторов? Потому что в высшей математике рассматривается еще векторное, косое и другие произведения. Косым произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют

число, равное произведению модулей этих векторов и синуса ориентированного угла между первым и вторым векторами.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми равен φ , называют такой вектор $\vec{c}$, что

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что из его конца кратчайший поворот от $\vec{a}$ до $\vec{b}$ виден против движения часовой стрелки.

Важную роль тут играет и ориентация пространства, угла и т. п. Поэтому для таких произведений переместительный закон не имеет места.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов.
2. Сформулируйте определение угла между двумя векторами.
3. Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$?
4. Чему равно скалярное произведение векторов, по крайней мере один из которых нулевой?
5. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.
6. Как найти длину вектора $\vec{a}$?



Выполним вместе

1. Найдите косинус угла A треугольника ABC , если $A(1; -3; -5)$, $B(1; 1; -2)$, $C(1; 3; 3)$.

РЕШЕНИЕ. Введем векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ (рис. 42) и найдем их координаты $\vec{AB} = (0; 4; 3)$, $\vec{AC} = (0; 6; 8)$.

По определению скалярного произведения $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \times |\vec{AC}| \cdot \cos A$. Поэтому $\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$.

Поскольку $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 + 24 + 24 = 48$,
 $|\vec{AB}| = \sqrt{0+16+9} = 5$, $|\vec{AC}| = \sqrt{0+36+64} = 10$, то
 $\cos A = \frac{48}{5 \cdot 10} = \frac{24}{25}$.

ОТВЕТ. $\angle A = \arccos \frac{24}{25}$.

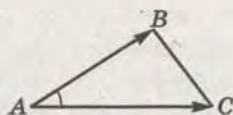


Рис. 42

2. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{3}$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 30^\circ + |\vec{b}|^2} = \\ = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 18 + 27} = \sqrt{49} = 7.$$

ОТВЕТ. $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.

3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = (1; 2; 2)$ и $\vec{b} = (2; 3; 6)$.

РЕШЕНИЕ.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{20}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}.$$

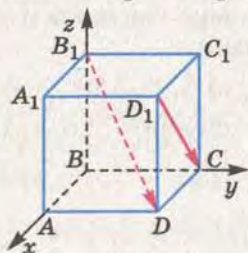
ОТВЕТ. $\cos \varphi = \frac{20}{21}$.

4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что $B_1 D \perp D_1 C$.

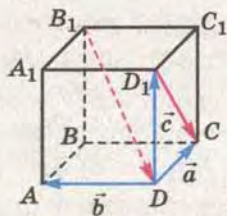
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I способ. Расположим данный куб в прямоугольной системе координат (рис. 43, а) и введем векторы $\vec{B_1 D}$ и $\vec{D_1 C}$. Поскольку $B_1(0; 0; a)$, $D(a; a; 0)$, $D_1(a; a; a)$, $C(0; a; 0)$, то $\vec{B_1 D} = (a; a; -a)$, $\vec{D_1 C} = (-a; 0; -a)$. Тогда $\vec{B_1 D} \cdot \vec{D_1 C} = -a^2 + 0 + a^2 = 0$.

Следовательно, $\vec{B_1 D} \perp \vec{D_1 C}$. Из чего следует, что перпендикулярными будут и отрезки $B_1 D$ и $D_1 C$.

II способ. Введем векторы $\vec{DC} = \vec{a}$, $\vec{DA} = \vec{b}$, $\vec{DD_1} = \vec{c}$ (рис. 43, б). Тогда $\vec{B_1 D} = \vec{B_1 B} + \vec{BD} = -\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{D_1 C} = \vec{DC} - \vec{DD_1} = \vec{a} - \vec{c}$. Тогда $\vec{B_1 D} \cdot \vec{D_1 C} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{c}) = -(\vec{a}^2 - \vec{c}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c}) = -(|\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2) = 0$, так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Следовательно, $\vec{B_1 D} \perp \vec{D_1 C}$.



а)



б)

Рис. 43



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно

228. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб с ребром 1 (рис. 44).

а) Найдите угол между векторами:

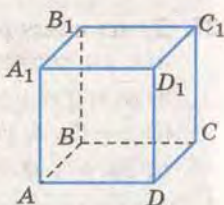
 $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$; $\overline{AA_1}$ и $\overline{AD}$; $\overline{BD}$ и $\overline{BC}$; $\overline{BC}$ и $\overline{B_1 C_1}$; $\overline{AB}$ и $\overline{D_1 C_1}$; $\overline{AD_1}$ и $\overline{AD}$; $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$; $\overline{B_1 B}$ и $\overline{DD_1}$.
б) Найдите: $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; $\overline{BC} \cdot \overline{DD_1}$;
 $\overline{DC} \cdot \overline{AB}$; $\overline{AA_1} \cdot \overline{D_1 D}$; $\overline{AB_1} \cdot \overline{AA_1}$.


Рис. 44

229. Найдите угол между двумя единичными векторами, если их скалярное произведение равно:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) 1; д) -0,5; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.230. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:а) $\vec{a} = (0; 1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0; 1)$;б) $\vec{a} = (1; 1; 1)$, $\vec{b} = (2; 3; 4)$;в) $\vec{a} = (6; 0; -3)$, $\vec{b} = (-2; -5; 0)$;г) $\vec{a} = (4; 2; 1)$, $\vec{b} = (4; -2; -1)$.

231. Какой знак имеет скалярное произведение двух векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?

232. Укажите вид угла между векторами, если их скалярное произведение:

а) равно нулю; б) положительное; в) отрицательное.

А

233. В треугольнике ABC $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Найдите углы между векторами:а) $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$; б) $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$; в) $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.234. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их длины и угол между ними равны:а) 5, 12 , 60° ; б) 3, $\sqrt{2}$, 45° ; в) 5, 6, 120° ; г) 4, 7, 180° .235. Треугольник ABC – равносторонний, $AB = 12$. Найдите скалярное произведение:а) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; б) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

236. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\vec{a} = (1; 2; -3)$ и $\vec{b} = (-8; 2; 4)$;б) $\vec{m} = (-2; -3; 2)$ и $\vec{n} = (2; 3; 0,5)$;

в) $\vec{p} = (-3; -7; 1)$ и $\vec{k} = (-2; 10; -6)$;

г) $\vec{c} = \left(4\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right)$ и $\vec{d} = (2; 3; -10)$.

237. Даны векторы $\vec{p} = (1; -5; 2)$, $\vec{q} = (3; 1; 2)$. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{p} - \vec{q}$;

б) $\vec{p} + 2\vec{q}$ и $3\vec{p} - \vec{q}$;

в) $2\vec{p} + \vec{q}$ и $3\vec{p} - 2\vec{q}$.

238. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (3; 1; 1)$;

б) $\vec{a} = (2; 6; 4)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$;

в) $\vec{a} = (-4; -8; 1)$, $\vec{b} = (-3; 3; 0)$;

г) $\vec{a} = (-3; -4; 0)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$.

239. Найдите угол между векторами:

а) $\vec{a} = (-2; 0; 2)$, $\vec{b} = (0; 0; 4)$;

б) $\vec{x} = (1; 1; 0)$, $\vec{y} = (0; -1; 1)$;

в) $\vec{c} = (0; 0; 2)$, $\vec{d} = (1; 0; -1)$;

г) $\vec{p} = (0; 2; 2)$, $\vec{k} = (3; 0; 3)$.

240. Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A(2; 1; 3)$, $B(7; 4; 5)$, $C(4; 2; 1)$ — прямоугольный.

241. При каких значениях x векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны:

а) $\vec{m} = (1; 2; 3)$, $\vec{n} = (x; 3; 1)$;

б) $\vec{m} = (-3; x; 2)$, $\vec{n} = (9; x; 1)$;

в) $\vec{m} = (x + 2; x; 3)$, $\vec{n} = (1; 3; -2)$;

г) $\vec{m} = (x - 3; x; 1)$, $\vec{n} = (4; x; -3x)$?

242. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если он коллинеарен вектору $\vec{b} = (2; -1; 2)$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$.

243. Вычислите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$; б) $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.

Б

244. Дано: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $(\vec{a}; \vec{b}) = (\vec{b}; \vec{c}) = 60^\circ$. Вычислите скалярное произведение:

а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$; б) $(2\vec{a} + \vec{b})(3\vec{b} - 2\vec{c})$.

245. Вычислите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$, если:

а) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \perp \vec{b}$; б) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \perp \vec{b}$;

в) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$; г) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$.

246. Под действием силы 20 Н, приложенной под углом 30° к направлению перемещения, физическое тело переместилось на 3 м. Найдите выполненную этой силой работу.

247. Все ребра пирамиды $SABCD$ равны, а в основании лежит квадрат $ABCD$ (рис. 45). Найдите угол между векторами:

- а) $\vec{SA}$ и $\vec{SB}$; б) $\vec{SD}$ и $\vec{AD}$;
в) $\vec{SB}$ и $\vec{SD}$; г) $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$;
д) $\vec{AS}$ и $\vec{AC}$.

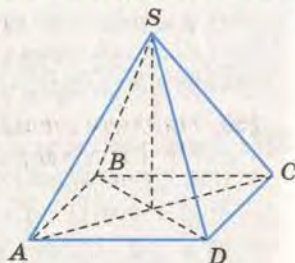


Рис. 45

248. Докажите, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

249. Найдите косинусы углов треугольника ABC , если:

- а) $A(0; -1; 1)$, $B(-4; -1; -2)$, $C(-3; -5; 1)$;
б) $A(2; -1; 1)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-1; 1; 0)$.

250. Даны точки $A(1; 4; 8)$ и $B(-4; 0; 3)$. Под каким углом отрезок AB видно из начала координат?

251. Даны три точки: $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Найдите координаты точки D , чтобы выполнялось условие $\vec{AD} \perp \vec{BC}$, если точка D лежит:

- а) на оси Ox ; б) на оси Oy ; в) на оси Oz .



252. Даны векторы $\vec{a} = (3; 4; 5)$ и $\vec{b} = (-1; 2; 0)$. Найдите число l , при котором вектор $\vec{a} + l\vec{b}$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.

253. Вычислите $|\vec{a} + \vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 24$.

254. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

- а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 19$;
б) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; в) $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$.

255. Дано: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $(\vec{a}; \vec{b}) = (\vec{b}; \vec{c}) = 60^\circ$, $\vec{b} \perp \vec{c}$. Найдите длину вектора:

- а) $\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $\vec{a} - 2\vec{c}$; в) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

256. Вычислите угол между векторами $\vec{m} = 2\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{n} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

257. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если его длина равна $2\sqrt{3}$ и он перпендикулярен к векторам $\vec{m} = (1; -2; 1)$, $\vec{n} = (2; 1; -3)$.

258. Высота правильной треугольной призмы в 2 раза больше стороны основания. Найдите угол между прямыми:
 а) CA_1 и BC_1 ; б) AB_1 и BC_1 .
259. Найдите углы между медианами двух граней правильного тетраэдра.



Упражнения для повторения

260. Вектор, длина которого 10, имеет одинаковые координаты. Найдите их.
261. От точки $A(2; -5; 1)$ отложен вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Найдите координаты точки B , если $\vec{a} = (1; 3; -2)$.
262. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N, P , если $M \in B_1 C_1$, $N \in CC_1$, $P \in AB$.



§8 ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Векторы часто применяют в математике и физике. В геометрии с их помощью доказывают теоремы и решают интересные задачи.

Многим свойствам геометрических фигур соответствуют те или иные векторные равенства. Например, если:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ – точки A и B совпадают;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ – прямые AB и CD параллельны;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ – точки A, B, C лежат на одной прямой;

$\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$ – точки O, A, B, C – одной плоскости;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ – прямые AB и CD перпендикулярны;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ .

Пользуясь такими соотношениями, можно решать геометрические задачи. Для этого данные в задачи соотношения между геометрическими объектами сначала как-бы «переводят» на язык векторов. Потом преобразовывают найденные векторные равенства и опять «переводят» их на обычный язык геометрии. Особенно часто при этом применяют теорему о центре масс системы точек.

Точку G называют *центроидом* n данных точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, если $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ (рис. 46).



Рис. 46

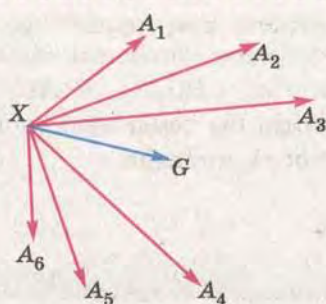


Рис. 47

Теорема 6. Если G – центр масс n точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, а X – произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{XA_n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых точек $X, G, A_1, A_2, \dots, A_n$ выполняются векторные равенства $\overrightarrow{XA_i} = \overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GA_i}, i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 47). Сложив их, получим

$$\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{XA_n} = n\overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n}.$$

Если G – центр масс точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, то сумма n последних слагаемых этого векторного равенства равна $\vec{0}$. Следовательно, $n\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{XA_n}$.

Умножив обе части этого равенства на $\frac{1}{n}$, получим то, что и нужно было доказать.

Следствие. Если G – середина отрезка AB , или точка пересечения медиан треугольника ABC , или центр масс тетраэдра $ABCD$ (рис. 48), то соответственно:

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}), \quad \overrightarrow{XG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}),$$

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}).$$

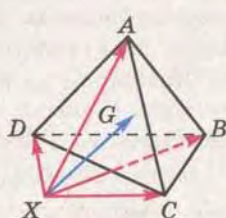
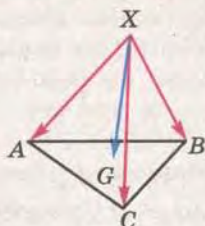
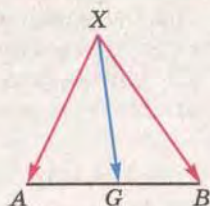


Рис. 48

Центроид тетраэдра – то же самое, что и центроид его вершин.

ЗАДАЧА. Докажите, что уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (a; b; c)$, имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть плоскость α проходит через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n} = (a; b; c)$, а

$M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости α (рис. 49). Векторы $\vec{n} = (a; b; c)$ и $\vec{AM} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ перпендикулярны. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (*)$$

Это – уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\vec{n} = (a; b; c)$. Этот вектор называют *нормалью* к плоскости.

Если в уравнении (*) обозначить $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, его можно подать в виде $ax + by + cz + d = 0$. Это – общее уравнение плоскости.

Используя векторный метод, можно записать и уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и параллельной вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, который называется *направляющим вектором* данной прямой.

Возьмем на искомой прямой l произвольную точку $M(x; y; z)$. Тогда векторы $\vec{M_0M}$ и $\vec{s}$ – коллинеарны, т. е. $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Получили уже известное вам каноническое

уравнение прямой, где числа m, n, p – координаты направляющего вектора данной прямой.

Учитывая, что уравнение плоскости задает координаты вектора, перпендикулярного к этой плоскости, а уравнение прямой – координаты направляющего вектора, то, используя свойства векторов, можно находить угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью и угол между плоскостями.

Используя векторный метод, можно доказать еще одну очень полезную формулу, а именно – формулу расстояния от точки до плоскости. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, опреде-

ляется по формуле $d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Предлагаем доказать эту формулу самостоятельно.

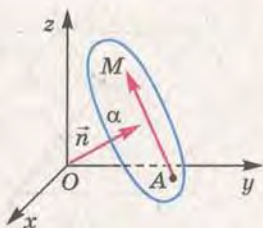


Рис. 49

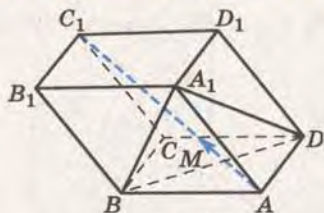


Рис. 50

Следовательно, векторным методом можно решать не только задачи, содержащие векторы в условии, а более широкий класс задач. Но помните, что при решении таких задач нужно сначала ввести векторы и сформулировать условие задачи на векторном языке.

ЗАДАЧА. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, M – точка пересечения медиан треугольника $A_1 BD$ (рис. 50). Докажите, что прямая AC_1 проходит через M . В каком отношении точка M делит отрезок AC_1 ?

РЕШЕНИЕ. По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. А поскольку M – точка пересечения медиан треугольника $A_1 BD$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Имеем: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Следовательно, точка M лежит на прямой AC_1 , причем $AC_1 = 3AM$, т. е. $AM : MC_1 = 1 : 2$.

Векторы можно применять не только в геометрии, но и при решении алгебраических задач. Особенно удобно это делать, доказывая неравенства и при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции или выражения.

Например, найдем наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}} + 3\sqrt{2}.$$

Преобразуем данную функцию $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{\frac{2-x}{2}} + 3\sqrt{2} = \sqrt{x} + 2\sqrt{2} \times \sqrt{2-x} + 3\sqrt{2}$ и учтем, что ее область определения $D(y) = [0; 2]$.

Введем векторы $\vec{a} = (1; 2\sqrt{2}; 3)$ и $\vec{b} = (\sqrt{x}; \sqrt{2-x}; \sqrt{2})$. Тогда данную функцию можно записать в виде $y = \vec{a} \cdot \vec{b}$, ведь $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \sqrt{x} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-x} + 3 \cdot \sqrt{2}$. Поскольку $|\vec{a}| = \sqrt{1+8+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x+2-x+2} = 2$, то $y = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 6\sqrt{2} \cos \varphi$. Поэтому наибольшее значение функции равно $6\sqrt{2}$ и достигается тогда, когда значение $\cos \varphi$ – наибольшее, т. е. если $\cos \varphi = 1$, а $\varphi = 0^\circ$.

Найдем, при каких x функция принимает наибольшее значение. Поскольку $\varphi = 0^\circ$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – сонаправлены, тогда их координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{ или } \begin{cases} 3\sqrt{x} = \sqrt{2}, \\ 3\sqrt{2-x} = 4, \end{cases} \text{ откуда } x = \frac{2}{9}.$$

Следовательно, наибольшее значение функции равно $6\sqrt{2}$ и достигается при $x = \frac{2}{9}$.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое векторный метод решения задач?
2. Какие векторные формулы вам известны?
3. Как на языке векторов записать, что прямые параллельны; перпендикулярны; что точки совпадают; принадлежат одной прямой?
4. Можно ли применять векторный метод к задачам, условие которых не содержит векторов? Как это сделать?
5. Можно ли применять векторный метод к решению задач по алгебре? Приведите примеры.
6. Сформулируйте теорему о центроиде n точек.
7. Какой вид имеет уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (a; b; c)$?



Выполним вместе

1. M – точка пересечения медиан грани ABC тетраэдра $PABC$, $PA = 3$, $PB = 6$, $PC = 9$ и $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \alpha$. Найдите PM .

РЕШЕНИЕ. $\vec{PM} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC})$

(рис. 51). Поэтому

$$\begin{aligned} PM^2 &= \frac{1}{9}(PA^2 + PB^2 + PC^2 + 2 \cdot \vec{PA} \cdot \vec{PB} + \\ &\quad + 2 \cdot \vec{PB} \cdot \vec{PC} + 2 \cdot \vec{PC} \cdot \vec{PA}) = \frac{1}{9}(3^2 + 6^2 + 9^2 + \\ &\quad + 2\cos\alpha(3 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 9 \cdot 3)) = 14 + 22\cos\alpha. \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $PM = \sqrt{14 + 22\cos\alpha}$.

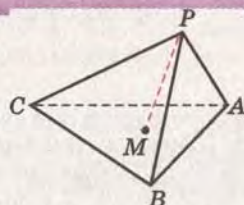


Рис. 51

2. Все вершины правильного треугольника лежат на сфере, центр которой совпадает с центром треугольника. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки сферы до вершин треугольника постоянна (не зависит от положения точки на сфере).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ABC – правильный треугольник, а M – точка на сфере радиуса r (рис. 52).

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}.$$

Следовательно,

$$MA^2 = MO^2 + OA^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA},$$

$$MB^2 = MO^2 + OB^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB},$$

$$MC^2 = MO^2 + OC^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Сложим эти равенства:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Учитывая, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ и что $MO^2 = OA^2 = OB^2 = OC^2 = r^2$, получим $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6r^2$. Это значение одно и то же для любой точки M на сфере.

3. Докажите с помощью векторов, что когда прямая перпендикулярна к двум сторонам треугольника, то она перпендикулярна и к третьей его стороне (рис. 53).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $KP \perp AB$ и $KP \perp AC$, то

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{KP} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \\ &= \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $KP \perp BC$.

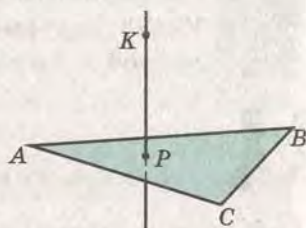


Рис. 53

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно

263. Что можно сказать об отрезках AB и CD , если $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$?
264. Установите взаимное положение точек A, B, C , если:
- $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
 - $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BA}$.
265. Лежат ли точки A, B, C на одной прямой, если:
- $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$;
 - $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$;
 - $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$?
266. Установите вид четырехугольника $ABCD$, если:
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
 - $\overrightarrow{BC} = 0,3\overrightarrow{AD}$.
267. Установите вид $\triangle ABC$, если $\overrightarrow{CA} = (-2; 3; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (3; 2; -4)$.
268. Установите взаимное положение плоскостей:
- $2x + 3y - 5z - 16 = 0$ и $2x + 3y - 5z + 12 = 0$;
 - $3x - 2y - 3z - 5 = 0$ и $x + 3y - z + 2 = 0$.

А

269. Составьте уравнение плоскости, которая перпендикулярна к вектору $n = (5; 0; -3)$ и проходит через точку $A(2; -1; 4)$.
270. Даны точки $A(1; 2; -3)$ и $B(4; -2; 4)$. Составьте уравнение плоскости, которая перпендикулярна к прямой AB и проходит через точку A .
271. Дана точка $A(a; b; c)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат O перпендикулярно к прямой OA .
272. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(1; -3; 5)$ и параллельна плоскости $2x - 3y + z + 10 = 0$.

Б

273. Найдите угол между прямыми $\frac{x-1}{2} - \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{-2}$.
274. Найдите угол между плоскостями $2x + 3y - z + 2 = 0$ и $x - 2y + z - 4 = 0$.
275. Напишите уравнение плоскости, касающейся сферы $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$ в начале координат.
276. В тетраэдре $ABCD$ $AB \perp CD$. Докажите, что $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$.
277. Точки K, L, M, N – середины ребер AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников AML и CNK совпадают.
278. Докажите, что как бы не были расположены в пространстве параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – вершины параллелограмма или принадлежат одной прямой (рис. 54).
279. Дана неплоская замкнутая ломаная $ABCD A$. Длины звеньев AB и CD равны a и b , а угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен φ . Найдите расстояние между серединами звеньев AD и BC .

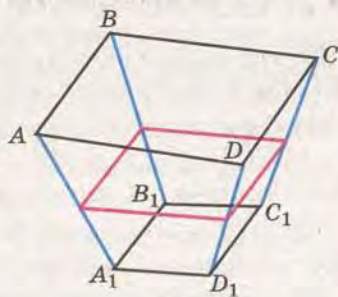


Рис. 54

280. Используя векторный метод, докажите теорему о трех перпендикулярах.
281. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний $\triangle ABC$. $\angle A_1AB = \angle A_1AC$. Докажите, что $AA_1 \perp BC$.

282. Медианы граней DAB и DAC тетраэдра $ABCD$ пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2 . Докажите, что $M_1M_2 \parallel BC$.

283. Концы отрезка AB лежат на перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по прямой m . Расстояния AA_1 и BB_1 от точек A и B до прямой m равны соответственно a и b , а $A_1B_1 = c$. Найдите длину отрезка AB (рис. 55).

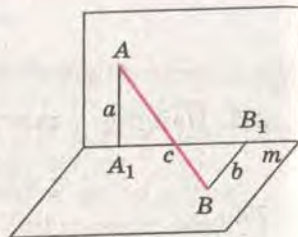


Рис. 55

284. Три ребра тетраэдра, выходящие из одной вершины, равны, углы между ними также равны. Докажите, что каждое ребро такого тетраэдра перпендикулярно к противоположному.
285. Точка K — середина ребра AC правильного тетраэдра $ABCD$. Найдите косинус угла между прямыми AB и KD .

В

286. Найдите косинус угла между прямыми, принадлежащими скрещивающимся медианам двух граней правильного тетраэдра.
287. Все вершины правильного тетраэдра лежат на сфере. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки сферы до вершин тетраэдра постоянная.
288. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ BD_1 перпендикулярна к плоскости, проходящей через точки A, B_1, C . Докажите, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб.
289. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки пространства до вершин A, B_1, C_1, D равна сумме квадратов расстояний от этой точки до вершин A_1, B, C, D_1 .
290. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $A(1; 3; -2)$ и $B(-3; 4; -1)$, и плоскостью $x + 2y - z + 3 = 0$.
291. Найдите множество точек, равноудаленных от плоскостей:
 а) $2x - y + 3z - 5 = 0$ и $2x - y + 3z + 3 = 0$;
 б) $2x + y - 2z + 5 = 0$ и $x - 2y + 2z - 4 = 0$.
292. Найдите расстояние между двумя скрещивающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно a .
293. Найдите расстояние между прямыми AB и CD , если $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$, $D(-3; 0; 4)$.
294. Найдите наибольшее значение выражения:
 а) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$; б) $y = 3x + 4\sqrt{1-x^2} + 5$.
 При каком значении x оно достигается?

Упражнения для повторения

295. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.
296. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{p}| = 2$, а углы между ними 60° .
297. Как разрезать куб на три равные четырехугольные пирамиды? А на шесть равных четырехугольных пирамид?

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
В ПРОСТРАНСТВЕ. ДВИЖЕНИЯ

Если точки данной фигуры F сместить каким-либо способом, получим новую фигуру F_1 . Если разные точки первой фигуры смещаются (отображаются) на разные точки второй, говорят о *преобразовании* данной фигуры.

Все пространство – также фигура. Поэтому можно говорить и о преобразовании пространства.

В стереометрии, как и в планиметрии, из всех преобразований важную роль играют движения. *Движением* называют преобразование, сохраняющее расстояния между точками.

Далее мы рассмотрим важнейшие движения пространства: симметрии (относительно точки, плоскости, прямой), поворот, параллельный перенос и др. Но сначала докажем общие свойства всех движений.

Теорема 7. *Точки, принадлежащие прямой, в результате движения переходят в точки, принадлежащие прямой, и сохраняется порядок их взаимного положения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точки A, B и C лежат на прямой, причем B – между A и C , т. е. $AB + BC = AC$ (рис. 56). Если какое-либо движение отображает данные точки на A_1, B_1, C_1 , то вследствие сохранения расстояний между точками $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, т. е. имеет место равенство $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. А это значит, что точка B_1 лежит между A_1 и C_1 . Теорема доказана.

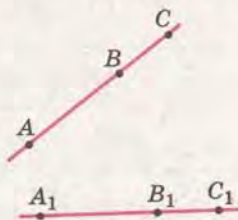


Рис. 56

СЛЕДСТВИЕ. Движение отображает прямую на прямую, луч – на луч, отрезок – на отрезок, равный данному.

Теорема 8. Движение отображает треугольник на треугольник, равный данному.

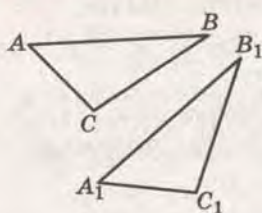


Рис. 57

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан произвольный треугольник ABC (рис. 57). Движение отображает его стороны AB , BC , CA на отрезки A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 , образующие треугольник $A_1B_1C_1$. При этом, вследствие сохранения расстояний $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1A_1 = CA$. Следовательно, по трем сторонам $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Движение отображает угол на угол, равный ему.

Можно доказать, что движение отображает плоскость на плоскость, тетраэдр – на тетраэдр и т. п.

Определение симметрии относительно точки, известное из планиметрии, остается правильным и для стереометрии. Точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки O* , если O – середина отрезка AA_1 . Преобразование, при котором каждая точка данной фигуры отображается на точку, симметричную ей относительно O , называется *симметрией относительно точки O* . Например, если даны тетраэдр $ABCD$ и точка O (рис. 58), то, построив точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , симметричные вершинам данного тетраэдра относительно O , получим вершины нового тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$, симметричного данному.

Теорема 9. Симметрия относительно точки – движение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть симметрия относительно точки O отображает любые две точки A и B на точки A_1 и B_1 . Докажем, что $A_1B_1 = AB$ (рис. 59). Поскольку $\vec{OA} = -\vec{OA_1}$ и $\vec{OB} = -\vec{OB_1}$, то $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OA_1} - \vec{OB_1} = \vec{B_1A_1}$.

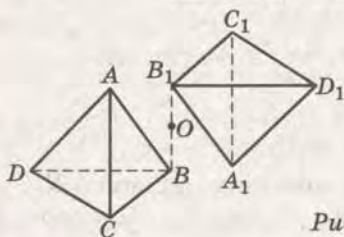


Рис. 58

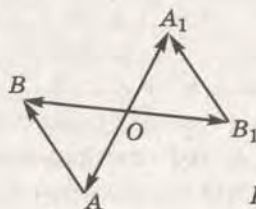


Рис. 59

Вектор $\overline{AB}$ равен вектору $\overline{B_1A_1}$, следовательно, равны и их длины: $AB = B_1A_1$. А это и надо было доказать.

Из доказанного равенства $\overline{AB} = \overline{B_1A_1}$ следует также, что отрезки AB и A_1B_1 параллельны или принадлежат одной прямой. Следовательно, симметрия относительно точки отображает прямую на параллельную прямую (или такую, что совпадает с ней), плоскость – на параллельную плоскость (или такую, что совпадает с ней).

Если симметрия относительно некоторой точки O отображает данную фигуру на ту же фигуру, такую фигуру называют *центрально-симметричной*, а точку O – ее *центром симметрии*. Например, центрально-симметричной фигурой является каждый параллелепипед. Точка пересечения диагоналей – его центр симметрии (рис. 60). Центрально-симметричной является правильная n -угольная призма, если n – число четное. Ни одна пирамида не имеет центра симметрии.

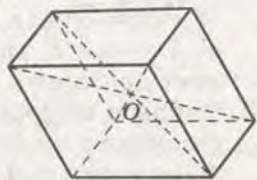


Рис. 60

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое геометрическое преобразование? А движение?
2. Какие две точки называются симметричными относительно данной точки? А две фигуры?
3. Что такое симметрия относительно точки в пространстве? Какие ее свойства?
4. Какие фигуры называют центрально-симметричными? Приведите примеры.



Выполним вместе

1. Докажите, что движение отображает плоскость на плоскость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – произвольная плоскость (рис. 61). Построим на ней треугольник ABC . Вследствие движения он отобразится на $\triangle A_1B_1C_1$, принадлежащий некоторой плоскости α_1 . Покажем, что в результате такого движения плоскость α отображается на α_1 .

Пусть K – произвольная точка плоскости α . Проведем через K прямую, пересекающую $\triangle ABC$ в точках P и T . Прямая KT отображается движением на прямую K_1T_1 , пересекающую $\triangle A_1B_1C_1$ в точках P_1 и T_1 . Поскольку

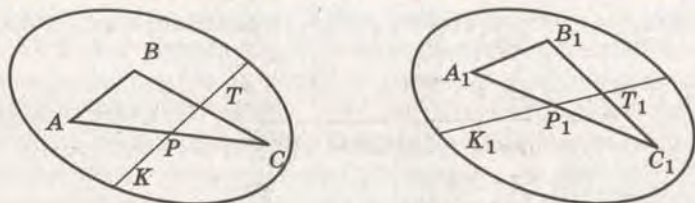


Рис. 61

$P_1 \in \alpha_1$ и $T_1 \in \alpha_1$, то и $K_1 \in \alpha_1$ (аксиома C_3). Получается, в результате рассматриваемого движения любая точка K плоскости α отображается на точку K_1 плоскости α_1 . И любая точка K_1 плоскости α_1 является образом некоторой точки K данной плоскости α . Следовательно, существует движение, отображающее плоскость α на α_1 .

2. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(1; 2; 3)$ относительно точки $M(a; b; c)$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $A_1(x; y; z)$ – искомая точка. Поскольку $M(a; b; c)$ – середина отрезка AA_1 , то $a = \frac{x+1}{2}$, $b = \frac{y+2}{2}$, $c = \frac{z+3}{2}$,

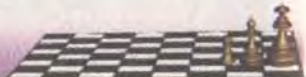
откуда $x = 2a - 1$, $y = 2b - 2$, $z = 2c - 3$.

ОТВЕТ. $A_1(2a - 1; 2b - 2; 2c - 3)$.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



298. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур.
299. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать самой фигуре?
300. Верно ли, что центрально-симметричный выпуклый многогранник имеет четное число вершин, ребер, граней?
301. Докажите, что точки $A(1; 3; 5)$ и $B(-1; -3; -5)$ симметричны относительно начала координат.
302. Симметричны ли точки A и A_1 относительно точки O , когда известно, что $OA = OA_1$?
303. При некотором отражении сфера $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1$ отобразилась на сферу $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$. Является ли данное отражение движением? Почему?
304. Симметричны ли любые две точки пространства относительно некоторой третьей точки?
305. В пространстве даны две параллельные прямые. Симметричны ли они относительно точки? Сколько таких точек существует?

А

306. Существуют ли точки, прямые, плоскости, которые при центральной симметрии отображаются на себя? Выполните соответствующие рисунки.
307. Могут ли два неравных отрезка быть симметричными относительно некоторой точки?
308. Найдите координаты точек, симметричных относительно начала координат точкам $A(1; -3; 2)$, $B(-5; 0; 2)$, $C(3; -1; 0)$, $D(0; 0; 0)$.
309. Найдите координаты точки M , относительно которой симметричны точки $A(-3; 4; 6)$ и $B(1; 2; -4)$. Найдите координаты точек, симметричных точке M относительно точек A и B .
310. Запишите уравнение сферы, симметричной сфере $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$ относительно точки $S(2; 3; -2)$.
311. Даны отрезок AB и точка O , не принадлежащая прямой AB . Постройте фигуру, симметричную данному отрезку относительно точки O . Докажите, что построенный отрезок лежит в плоскости OAB .
312. Постройте фигуру, симметричную данному $\triangle ABC$ относительно: а) произвольной точки O ; б) вершины C ; в) середины M стороны AB .
313. Постройте треугольник, симметричный данному $\triangle ABC$ относительно точки O , которая не лежит в плоскости ABC . Докажите, что данный и построенный треугольники равны и лежат в параллельных плоскостях.

Б

314. $ABCDKLMN$ – куб. Постройте фигуру, симметричную ему относительно:
- точки A ;
 - середины ребра CM ;
 - центра грани $CDNM$ (рис. 62).

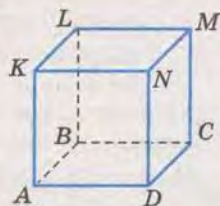


Рис. 62

315. Точки A, B, C, D расположены в пространстве так, что A и C симметричны относительно B , а B и D симметричны относительно C . Можно ли через все эти точки провести плоскость? А прямую?
316. Могут ли пересекающиеся или скрещивающиеся отрезки быть симметричными относительно некоторой точки?
317. Является ли центрально-симметричной правильная призма: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная?
318. Имеет ли центр симметрии наклонная призма, основание которой – правильный шестиугольник?

319. Докажите, что центр симметрии центрально-симметричного многогранника является центроидом его вершин.
320. Докажите, что движение отображает прямую, перпендикулярную к плоскости, в прямую, перпендикулярную к плоскости.
321. Докажите, что движение отображает двугранный угол в равный ему двугранный угол.
322. Напишите уравнение плоскости, симметричной плоскости $x - 2y + 3z - 2 = 0$ относительно начала координат.
323. Напишите уравнение прямой, симметричной прямой AB относительно начала координат, если $A(1; -2; 4)$, $B(2; -1; 3)$.

Б

324. Дан правильный тетраэдр. Постройте тетраэдр, симметричный данному относительно:
- а) вершины тетраэдра;
 - б) центра грани;
 - в) середины бокового ребра.
325. Постройте параллелепипед, симметричный прямоугольному параллелепипеду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ относительно точки M такой, что $B_1 M : MD = 3 : 1$. Разными цветами закрасьте объединение и пересечение данного и построенного параллелепипедов.
326. Постройте тетраэдр, симметричный правильному тетраэдру $ABCD$ относительно середины M его высоты, проведенной из вершины D (рис. 63). Разными цветами закрасьте объединение и пересечение данного и построенного тетраэдров.

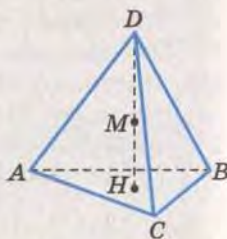


Рис. 63

Упражнения для повторения

327. Перпендикулярны ли плоскости:
- а) $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ и $3x - 2y - 4z - 5 = 0$;
 - б) $5x - 6y + z - 12 = 0$ и $2x + y - 4z = 0$?
328. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что имеет место равенство $\overline{BC} \cdot \overline{DA} + \overline{BD} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{DC} = 0$.
329. O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. Принадлежит ли точка C плоскости, в которой лежат точки A, B, O ?



СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ

Точки A и A_1 называются *симметричными относительно плоскости*, если эта плоскость перпендикулярна к отрезку AA_1 и делит его пополам (рис. 64).

Преобразование, отображающее каждую точку фигуры на точку, симметричную ей относительно данной плоскости, называется *симметрией относительно плоскости*.

Теорема 10. *Симметрия относительно плоскости — движение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть симметрия относительно плоскости α отображает точки A и B на точки A_1 и B_1 (рис. 65). Докажем, что $A_1B_1 = AB$.

Введем систему координат так, чтобы координатная плоскость xy совместилась с плоскостью α . Пусть координаты данных точек $A(a_1; a_2; a_3)$ и $B(b_1; b_2; b_3)$. Симметричными им относительно плоскости α будут точки $A_1(a_1; a_2; -a_3)$ и $B_1(b_1; b_2; -b_3)$. По теореме 1

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (-b_3 + a_3)^2}.$$

Как видим, $AB = A_1B_1$. А это и надо было доказать.

Следовательно, симметрия относительно плоскости — движение. Получается, она отображает отрезок на отрезок, равный ему, прямую — на прямую, плоскость — на плоскость, тело — на тело.

Можно ли совместить (мысленно) фигуры F и F_1 , если они симметричны относительно некоторой плоскости? Не всегда. Например, если ребра a, b, c наклонного параллелепипеда F

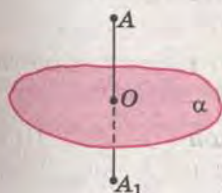


Рис. 64

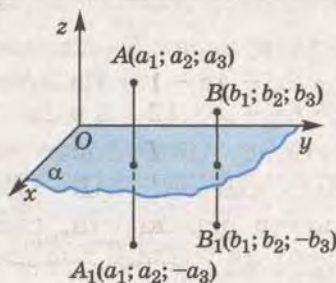


Рис. 65

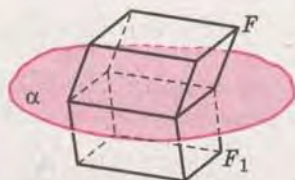


Рис. 66

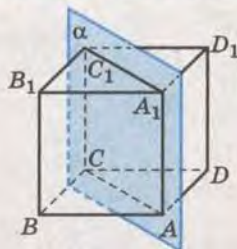


Рис. 67

не равны, то симметричный ему относительно плоскости α параллелепипед F_1 совместить с F невозможно (рис. 66). Говорят, что параллелепипеды F и F_1 имеют *разные ориентации базисов*. Они отличаются, как правый и левый ботинки одной пары, как правая и левая нарезки на болтах и т. п.

Симметрия относительно плоскости изменяет ориентацию базиса.

Рассмотрим куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ и плоскость α , проходящую через его ребра AA_1 и CC_1 (рис. 67). Симметрия относительно плоскости α точки B и B_1 отображает на D и D_1 , ребро BB_1 — на ребро DD_1 , грань ABB_1A_1 — на грань ADD_1A_1 , каждую внутреннюю точку X — на внутреннюю точку X_1 этого самого куба. Говорят, что симметрией относительно плоскости α данный куб отображается на себя.

Если некоторая фигура симметрией относительно плоскости α отображается на себя, эту фигуру называют *симметричной относительно плоскости*, а α — *плоскостью симметрии* данной фигуры. Например, правильная треугольная призма имеет четыре плоскости симметрии, а шар — бесконечно много.

Симметричные относительно плоскости молотки, рубанки, стамески, лопаты, отвертки, кирпичи, трубы, подшипники, автомобили, самолеты, ракеты, корабли и многие другие орудия труда и механизмы, а также некоторые овощи, насекомые (рис. 68) и т. п. Учение о симметрии многогранников важно для кристаллографии. Оказывается, один и тот же кристалл в разных направлениях имеет разные физические свойства, например твердость. И обнаружить эти направления помогает исследование симметрии кристаллов.



Рис. 68

Симметрию относительно плоскости называют еще отражением в плоскости. Вспомните, как отображаются фигуры в зеркале или на поверхности спокойного водоема: озера, реки и т. п.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие две точки называются симметричными относительно плоскости?
2. Какие две фигуры называются симметричными относительно плоскости?
3. Докажите, что симметрия относительно плоскости — движение.
4. Что такое симметрия относительно плоскости в пространстве? Какие ее свойства?
5. Фигура симметрична относительно плоскости. Что это за фигура? Приведите примеры.
6. Какие свойства имеет фигура, симметричная относительно плоскости?



Выполним вместе

1. Верно ли, что какие бы не были плоскости α и β , они симметричны относительно некоторой плоскости ω ?

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим два случая. Если данные плоскости α и β пересекаются, они симметричны относительно плоскости ω , которая проходит через прямую их пересечения, и делят угол между данными плоскостями пополам.

Если плоскости α и β параллельны, они симметричны относительно плоскости ω , равноудаленной от α и β .

Сформулированное утверждение верно.

2. Напишите уравнение плоскости, относительно которой симметричны точки $A(-1; 3; -2)$ и $B(3; 1; -4)$.

РЕШЕНИЕ. Если точки A и B симметричны относительно плоскости, то эта плоскость проходит через середину M отрезка AB перпендикулярно к нему (рис. 69). Поскольку координаты середины отрезка $(1; 2; -3)$, а координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (4; -2; -2)$, то уравнение плоскости будет иметь вид $4(x - 1) - 2(y - 2) - 2(z + 3) = 0$ или $4x - 2y - 2z - 6 = 0$, откуда $2x - y - z - 3 = 0$.

Следовательно, точки $A(-1; 3; -2)$ и $B(3; 1; -4)$ симметричны относительно плоскости $2x - y - z - 3 = 0$.

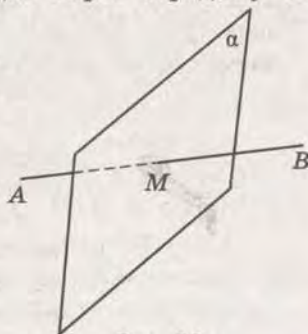


Рис. 69



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



330. Укажите плоскости симметрии (если они существуют) таких фигур: прямой, отрезка, луча, правильного треугольника, квадрата, ромба, прямоугольника.

331. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 70). Что является образом при симметрии относительно плоскости BDD_1B_1 :

- а) точек A, B, C_1 ;
б) отрезков AA_1, BB_1, BD_1, AC_1 ;
в) $\triangle AB_1C, \triangle BC_1D$;
г) квадрата ABB_1A_1 ?

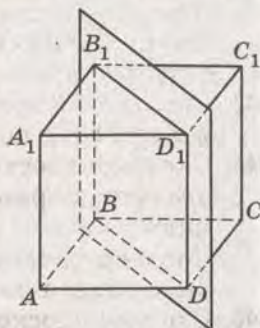


Рис. 70

332. Две одинаковые окружности лежат в одной плоскости. Будут ли они симметричны относительно некоторой плоскости? Если да, то что это за плоскость?
333. Имеет ли плоскость симметрии фигура, которая состоит из двух сфер, имеющих внешнее касание, если радиусы сфер:
- а) одинаковые; б) разные?

А

334. Начертите фигуру, симметричную данному отрезку AB относительно плоскости α . Рассмотрите все возможные случаи.
335. Плоскость β не пересекает треугольник ABC . Начертите фигуру, симметричную треугольнику ABC относительно плоскости β .
336. Найдите координаты точек, симметричных точке $A(a_1; a_2; a_3)$ относительно координатных плоскостей.
337. Отрезки AB и A_1B_1 симметричны относительно некоторой плоскости. Могут ли они принадлежать скрещивающимся прямым? А пересекающимся прямым?
338. Могут ли быть симметричными относительно некоторой плоскости α два отрезка одной прямой? Как расположена плоскость α относительно этой прямой?
339. Точки A и B симметричны относительно плоскости β . Докажите, что когда $M \in \beta$, то $MA = MB$.
340. Отрезок AB пересекает плоскость ω в точке O . Отрезок OB_0 — проекция отрезка OB на плоскость ω . Постройте фигуру, симметричную отрезку AB относительно плоскости ω .

341. Прямая AB наклонена к некоторой плоскости под углом φ и симметрична относительно этой плоскости прямой A_1B . Найдите угол между прямыми AB и A_1B .
342. Дано изображение тетраэдра $ABCD$ и его высоты DH . Постройте изображение фигуры, симметричной ему относительно плоскости ABC .
343. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная четырехугольная призма, отличная от куба?
344. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная трехугольная пирамида, если ее боковая грань не равна основанию?
345. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная четырехугольная пирамида? Нарисуйте их.
346. Сколько плоскостей симметрии имеет куб? Сделайте соответствующий рисунок.
347. Сколько плоскостей симметрии имеет правильный тетраэдр? Сделайте соответствующий рисунок.
348. Докажите, что точки $A(2; -1; 4)$ и $B(2; 1; 4)$ симметричны относительно плоскости xz .
349. Относительно каких координатных плоскостей симметричны точки: а) $A(4; 2; -3)$, $B(-4; 2; -3)$; б) $M(-3; 2; 6)$, $N(-3; 2; -6)$; в) $P(7; -2; -4)$, $K(7; 2; -4)$?

Б

350. Сколько плоскостей симметрии имеет тетраэдр, одно ребро которого в 2 раза короче каждого из остальных ребер (рис. 71)?

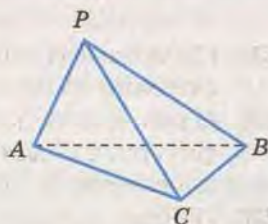


Рис. 71

351. Сколько плоскостей симметрии имеет прямая призма, основанием которой является равнобедренная трапеция? А если трапеция не равнобедренная?
352. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная пирамида, в основании которой лежит многоугольник с числом сторон: а) четным; б) нечетным?
353. Даны точки $A(2; -4; 3)$ и $B(-6; 2; 1)$. Напишите уравнение плоскости симметрии данных точек.
354. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; -1; 2)$ и $B(1; 2; 4)$, и прямой, симметричной данной относительно плоскости: а) xy ; б) yz .
355. Дана сфера $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 30$. Напишите уравнение плоскости, касательной к сфере в точке $A(1; -1; 2)$, и уравнение сферы, симметричной данной относительно этой плоскости.



356. В кубе две грани покрасили другим цветом. Сколько плоскостей симметрии имеет такой куб? Рассмотрите все возможные случаи.
357. Точки B и C симметричны точке A относительно перпендикулярных плоскостей β и γ , пересекающихся по прямой a . Найдите расстояние от A до прямой a , если $BC = 6$ м.
358. Верно ли, что какие бы не были прямые a и b , они симметричны относительно некоторой плоскости α ?
359. Постройте тетраэдр, симметричный тетраэдру $ABCD$ относительно плоскости, проходящей через середины ребер DA , DB , DC . Разными цветами закрасьте объединение и пересечение данного и построенного тетраэдров.
360. Постройте пирамиду, симметричную правильной четырехугольной пирамиде относительно плоскости, проходящей через середину высоты пирамиды, перпендикулярно к ней.
361. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(1; -2; 3)$ относительно плоскости $2x - y + 3z + 1 = 0$.
362. Точки A и B лежат по разные стороны от плоскости α . Найдите в плоскости α точку, разность расстояний от которой до точек A и B наибольшая.
363. Точки A и B не принадлежат плоскости α и расположены в одном полупространстве от нее. Найдите в плоскости α такую точку P , чтобы сумма расстояний $PA + PB$ была наименьшей.



Упражнения для повторения

364. Постройте тетраэдр, симметричный данному относительно точки, которая лежит: а) вне тетраэдра; б) внутри тетраэдра.
365. Найдите вершины треугольника, симметричного $\triangle ABC$ относительно точки $M(1; -2; 4)$, если $A(4; 0; 1)$, $B(4; 4; 1)$, $C(-1; 2; 0)$.
366. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку A и середины ребер CC_1 и $C_1 D_1$.
367. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Сделайте проволочные модели ломаных из трех равных и попарно перпендикулярных звеньев и расположите их так, чтобы они оказались симметричными относительно: а) точки; б) плоскости.



ПОВОРОТ И СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ

Пусть даны прямая l и две точки A и A_1 . Если перпендикуляры AK и A_1K , опущенные на прямую l , равны, имеют общее основание K и образуют угол φ , то говорят, что поворот вокруг прямой l на угол φ отображает точку A на A_1 (рис. 72). Угол φ может быть положительным или отрицательным.

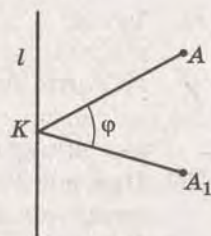


Рис. 72

Если каждую точку некоторой фигуры F повернуть вокруг прямой l на один и тот же угол φ , получим новую фигуру F_1 . Говорят, что поворот вокруг прямой l на угол φ отображает фигуру F на F_1 . Например, если куб F повернуть на угол 180° вокруг прямой l , проходящей через его ребро, получим новый куб F_1 (рис. 73). Поворот вокруг прямой l на угол 180° отображает куб F на F_1 . Этот самый поворот отображает вершину C на C_1 , ребро CP — на ребро C_1P_1 , грань $BCPK$ — на грань $B_1C_1P_1K_1$ и т. п.

Теорема 11. Поворот вокруг прямой является движением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в результате поворота вокруг прямой l на угол φ точки A и B данной фигуры отображаются на точки A_1 и B_1 (рис. 74). Если K — общее основание перпендикуляров, опущенных из точек A и A_1 на прямую l , а P — общее основание перпендикуляров, опущенных на прямую l из точек B и B_1 , то $KA = KA_1$, $PB = PB_1$, $\angle AK A_1 = \angle BP B_1 = \varphi$.

Справедливы и такие векторные равенства:

$$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KP} + \overline{PB}, \quad \overline{A_1B_1} = \overline{A_1K} + \overline{KP} + \overline{PB_1}.$$

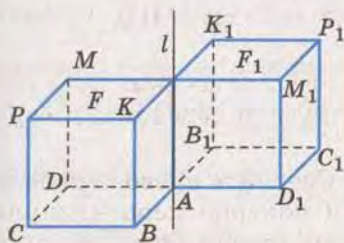


Рис. 73

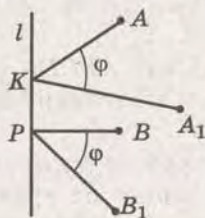


Рис. 74



Возведем их (скалярно) в квадрат:

$$AB^2 = AK^2 + KP^2 + PB^2 + 2\overline{AK} \cdot \overline{KP} + 2\overline{AK} \cdot \overline{PB} + 2\overline{KP} \cdot \overline{PB},$$

$$A_1B_1^2 = A_1K^2 + KP^2 + PB_1^2 + 2\overline{A_1K} \cdot \overline{KP} + 2\overline{A_1K} \cdot \overline{PB_1} + 2\overline{KP} \cdot \overline{PB_1}.$$

Поскольку $AK \perp KP$, $KP \perp PB$, $A_1K \perp KP$, $KP \perp PB_1$, $AK = A_1K$ и $PB_1 = PB$, то $AB^2 - A_1B_1^2 = 2\overline{AK} \cdot \overline{PB} - 2\overline{A_1K} \cdot \overline{PB_1} = -2KA \cdot PB \cdot \cos \omega + 2KA \cdot PB \cdot \cos \omega$.

Здесь ω – угол между лучами KA и PB (он равен углу между лучами KA_1 и PB_1). Найденная сумма равна 0, поэтому $AB^2 = A_1B_1^2$, откуда $AB = A_1B_1$. Теорема доказана.

Поворот вокруг прямой l на угол 180° называется *симметрией относительно прямой l* . Например, кубы F и F_1 , изображенные на рисунке 73, симметричны относительно прямой l . Поскольку поворот является движением, а симметрия относительно прямой – вид поворота, то и симметрия относительно прямой – движение. Она отображает прямую на прямую, плоскость – на плоскость, треугольник – на треугольник, равный данному.

π

Если поворотом вокруг некоторой прямой на угол $360^\circ : n$, где натуральное число $n \geq 2$, фигура совмещается с собой, то эту прямую называют *осью симметрии n -го порядка*. Например, правильная пятиугольная пирамида имеет ось симметрии пятого порядка. Сфера имеет бесконечно много осей симметрии любого порядка. Обратите внимание: ось симметрии n -го порядка не всегда является осью симметрии данной фигуры.

С поворотами материальных тел часто имеют дело токари, фрезеровщики, сверлильщики, бурильщики и др. Теоретические вопросы, связанные с поворотами фигур в пространстве, важны для специалистов, создающих турбины, электромоторы, центробежные насосы, разнообразные центрифуги и особенно – современные роторные и роторно-конвейерные машины.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое поворот?
2. Докажите, что поворот вокруг прямой – движение.
3. Какие две точки называются симметричными относительно прямой? А две фигуры?
4. Что такое симметрия относительно прямой в пространстве? Каковы ее свойства?
5. Приведите примеры фигур, симметричных относительно прямой.



Выполним вместе

1. Докажите, что прямая, содержащая середины противоположных ребер правильного тетраэдра, является его осью симметрии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M и N – середины ребер AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 75). Тогда $\triangle ANB$ равнобедренный ($AN = BN$), поэтому $MN \perp AB$. Аналогично, $\triangle DMC$ – равнобедренный, поэтому $MN \perp DC$. Следовательно, прямая l , проходящая через точки M и N , является общим серединным перпендикуляром для отрезков AB и CD . Тогда при симметрии относительно прямой l отрезок AB отображается на отрезок BA , CD – на DC , AC – на BD (так как точка A переходит в точку B , а точка C – в D) и BC – на AD .

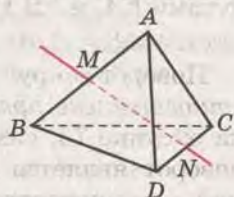


Рис. 75

Это значит, что симметрия относительно прямой l отображает вершины, ребра и грани тетраэдра $ABCD$ на вершины, ребра и грани этого же тетраэдра, т. е. тетраэдр $ABCD$ при симметрии относительно прямой l отображается на себя. Следовательно, прямая l является осью симметрии этого тетраэдра.

2. Куб повернули на 45° вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней. Нарисуйте объединение данного и образованного кубов. Изобразите оси симметрии этого тела.

РЕШЕНИЕ. Плоскости граней, перпендикулярных к оси, в результате поворота отображаются на себя. Объединение основания данного куба и образованного в результате поворота – центрально-симметричный невыпуклый 16-угольник с равными сторонами. Объединение рассматриваемых кубов – невыпуклая 16-угольная прямая призма. Она имеет 9 осей симметрии (рис. 76).

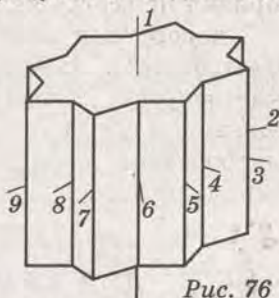


Рис. 76

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



368. Сколько осей симметрии имеет отрезок; прямая; плоскость?
369. Имеет ли ось симметрии луч; параллелограмм; трапеция?

370. Приведите примеры объектов окружающей среды, имеющих ось симметрии.
371. Укажите координаты точки, в которую отобразится точка $A(0; 5; 0)$ при повороте вокруг оси Oz по движению часовой стрелки на угол: а) 90° ; б) 180° ; в) 270° ; г) 360° .
372. Укажите координаты точки, симметричной точке $M(1; 2; 3)$ относительно: а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) оси Oz .

A

373. Даны прямая l и точки A и B . Выполните поворот вокруг прямой l на угол α : а) точки A ; б) отрезка AB ?
374. Даны две точки. Сколькими поворотами одну из них можно отобразить на другую?
375. Найдите координаты точки, в которую отображается точка $A(1; 2; 0)$ поворотом вокруг оси x на угол 90° .
376. Найдите координаты концов отрезка, образованного в результате поворота вокруг оси y на угол 90° отрезка с концами $A(0; 3; 4)$ и $B(0; 6; 0)$.
377. Найдите координаты вершин треугольника, образованного поворотом треугольника с вершинами $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$ вокруг оси z на угол 90° .
378. Сколько осей симметрии имеет куб? А прямоугольный параллелепипед, отличный от куба?
379. Сколько осей симметрии имеет правильная n -угольная пирамида?
380. Сколько осей симметрии имеет сфера?
381. Сколько осей симметрии имеет правильная шестиугольная призма?
382. Имеет ли оси симметрии правильная пятиугольная призма?
383. Имеет ли оси симметрии правильный тетраэдр? Сколько?
384. Сколько осей симметрии имеет фигура, которая состоит из двух равных квадратов, пересекающихся по их общей диагонали (рис. 77)?
385. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Сколько осей симметрии имеет тело, состоящее из двух таких пирамид с общим основанием?

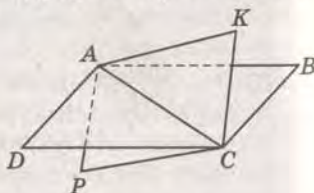


Рис. 77

Б

386. Докажите, что прямая, содержащая высоту правильной четырехугольной пирамиды, является ее осью симметрии.

387. Докажите, что прямая, содержащая точки пересечения диагоналей противоположных граней прямоугольного параллелепипеда, является его осью симметрии.
388. Докажите, что точки $A(2; -3; 1)$ и $B(2; 3; -1)$ симметричны относительно оси Ox . Укажите координаты точек, симметричных точкам A и B относительно оси: а) Oy ; б) Oz .
389. Как построить ось симметрии двух скрещивающихся прямых?
390. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте ось симметрии фигуры, которая является объединением двух прямых, содержащих ребра: а) AA_1 и CD ; б) BB_1 и AC ; в) AB_1 и CD_1 ; г) AC и $B_1 D$.
391. Постройте пирамиду, образованную поворотом правильной треугольной пирамиды вокруг высоты на угол 180° .
- В**
392. Докажите, что если каждое ребро тетраэдра равно противоположному, то он имеет три оси симметрии.
393. Даны два равных отрезка. Сколькими поворотами один из них можно отобразить на другой?
394. Имеет ли куб оси симметрии третьего порядка? Сколько?
395. Имеет ли правильный тетраэдр оси симметрии третьего порядка?
396. Имеет ли оси симметрии третьего порядка правильная четырехугольная пирамида?
397. Постройте тетраэдр, имеющий только одну ось симметрии.
398. Найдите все повороты пространства, отображающие на себя: а) правильную треугольную пирамиду; б) правильную четырехугольную пирамиду; в) правильный тетраэдр.
399. Постройте тетраэдр, образованный из правильного тетраэдра $ABCD$ при повороте его на угол 60° вокруг высоты DO . Разными цветами закрасьте объединение и пересечение данного и построенного тетраэдров.
400. Правильный тетраэдр повернули на 90° вокруг прямой, проходящей через середины его противоположных ребер. Нарисуйте объединение данного и образованного тетраэдров. Сколько граней имеет это объединение?
- 401*. Докажите, что если некоторая фигура имеет две перпендикулярные и пересекающиеся оси симметрии, то она имеет еще одну ось симметрии, перпендикулярную к ним.
402. Прямая l наклонена к плоскости α под углом φ . В результате поворота плоскости α вокруг прямой l на угол φ_1 плоскость α отобразилась на плоскость β . Как найти угол между плоскостями α и β ?



- 403*. Даны прямая l и точки A и B такие, что прямые l и AB скрещивающиеся. На прямой l найдите такую точку M , чтобы сумма расстояний $AM + MB$ была наименьшей.



Упражнения для повторения

404. Изобразите тетраэдр, имеющий только:
а) одну плоскость симметрии; б) две плоскости симметрии; в) три плоскости симметрии.
405. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(2; 5; 0)$ относительно плоскости $y = x$.
406. Три плоскости попарно перпендикулярны. Докажите, что прямые их пересечения также попарно перпендикулярны.



§ 12

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Одним из примеров движения является *параллельный перенос*.

Пусть $\overline{KP}$ – какой-нибудь вектор, а X – произвольная точка пространства (рис. 78). Если точка X_1 такая, что $\overline{XX_1} = \overline{KP}$, то говорят, что параллельный перенос на вектор $\overline{KP}$ отображает точку X на X_1 . Если выполнить параллельный перенос каждой точки некоторой фигуры F на один и тот же вектор $\overline{KP}$, получим новую фигуру F_1 . Говорят, что параллельный перенос на вектор $\overline{KP}$ отображает фигуру F на F_1 (рис. 79). В результате параллельного переноса все точки данной фигуры переносятся в одном направлении на одинаковые расстояния.



Теорема 12. *Параллельный перенос – движение.*

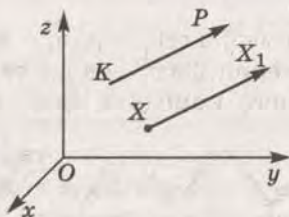


Рис. 78

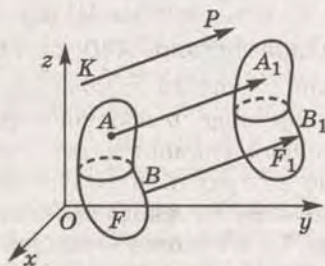


Рис. 79



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при параллельном переносе точки A и B отображаются соответственно на A_1 и B_1 . Докажем, что $A_1B_1 = AB$.

Возможны два случая. Если точки A, B, A_1, B_1 не принадлежат одной прямой, то ABB_1A_1 – параллелограмм (рис. 79) и, следовательно, $A_1B_1 = AB$. Если точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной прямой (рис. 80), то из равенства $AA_1 = BB_1$ следует: $A_1B_1 = AB_1 - AA_1 = AB_1 - BB_1 = AB$.

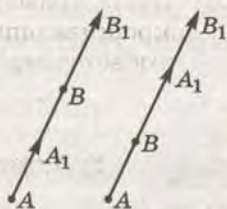


Рис. 80

Следовательно, если параллельный перенос отображает точки A и B на A_1 и B_1 , то всегда $A_1B_1 = AB$. Как видим, параллельный перенос сохраняет расстояния между точками, т. е. является движением.

Из теорем 7, 8 и 12 следует, что параллельный перенос отображает прямую на прямую, отрезок – на отрезок, равный ему, треугольник – на треугольник, равный ему, и т. п.

Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{p} = (a; b; c)$ точка $A(x; y; z)$ переходит в точку $A'(x'; y'; z')$. Тогда $\vec{AA'} = \vec{p}$. Поскольку $\vec{AA'} = (x' - x; y' - y; z' - z)$, то из условия равенства векторов получим систему уравнений

$$\begin{cases} x' - x = a, \\ y' - y = b, \\ z' - z = c, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c. \end{cases}$$

Эти отношения называют *формулами параллельного переноса пространства на вектор* $\vec{p} = (a; b; c)$.

ПРИМЕР. Найдите координаты образа точки $A(-1; 3; -5)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{p} = (1; 2; 6)$.

РЕШЕНИЕ. Пользуясь установленными отношениями, получим:

$$x' = -1 + 1 = 0; \quad y' = 3 + 2 = 5; \quad z' = -5 + 6 = 1.$$

Следовательно, $A'(0; 5; 1)$.

Параллельный перенос, рассматриваемый в геометрии, – абстрактная модель поступательного движения физического тела. Отдельный сегмент ножа зерноуборочного комбайна (рис. 81) можно получить в результате параллельного переноса смежного сегмента. То же можно сказать об отдельных секциях разложенной на плоскости гусеницы трактора, за-

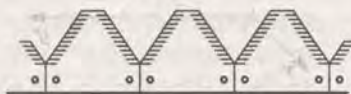


Рис. 81



стежки-«молнии», о кирпичах в стене, об отдельных этажах современного многоэтажного дома и т. п.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какое преобразование называют параллельным переносом в пространстве?
2. Докажите, что параллельный перенос пространства является движением.
3. Какие свойства имеет параллельный перенос фигур в пространстве?
4. Каким движением может быть композиция двух параллельных переносов?
5. Как найти координаты образа точки $A(x; y; z)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{p} = (a; b; c)$?



Выполним вместе

1. Есть две окружности одинаковых радиусов с центрами в точках O_1 и O_2 . При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка O_1 отображается на точку O_2 . Верно ли, что при этом параллельном переносе окружность с центром O_2 является образом окружности с центром O_1 ?

РЕШЕНИЕ. Из того, что точка O_1 при параллельном переносе отображается на точку O_2 , не следует, что каждая точка первой окружности отображается на точку второй окружности. Это будет только тогда, когда эти окружности лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

ОТВЕТ. Нет, не всегда.

2. Напишите уравнение плоскости, являющейся образом плоскости $2x + y - 3z + 2 = 0$ при параллельном переносе на вектор $\vec{p} = (1; -2; 3)$.

РЕШЕНИЕ. В заданной плоскости выберем произвольную точку, например точку $M(1; 2; 2)$. Образом точки M при параллельном переносе на вектор $\vec{p} = (1; -2; 3)$ будет точка $M'(2; 0; 5)$. Поскольку при параллельном переносе плоскость отображается на параллельную плоскость, то нужно записать уравнение плоскости, которая проходит через точку M' параллельно плоскости $2x + y - 3z + 2 = 0$, т. е. $2(x - 2) + 1(y - 0) - 3(z - 5) = 0$, или $2x + y - 3z + 11 = 0$.

ОТВЕТ. $2x + y - 3z + 11 = 0$.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



407. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 82).

1) Найдите образ отрезка:

а) AA_1 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{D_1 C_1}$;

б) AD при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{DC_1}$.

2) При каком параллельном переносе квадрат:

а) $ABCD$ является образом квадрата $A_1 B_1 C_1 D_1$;

б) $AA_1 B_1 B$ является образом квадрата $DD_1 C_1 C$?

3) Существует ли параллельный перенос, при котором образом:

а) отрезка $A_1 C_1$ является отрезок AC ;

б) отрезка AB_1 является отрезок CD_1 ;

в) квадрата $AA_1 B_1 B$ является квадрат $BB_1 C_1 C$?

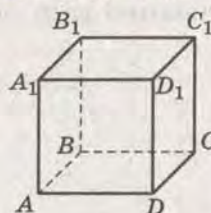


Рис. 82

408. Даны два равных треугольника. Всегда ли существует параллельный перенос, отображающий один из треугольников на второй?

409. Как должны быть расположены две равные фигуры, одну из которых можно получить параллельным переносом второй, если этими фигурами являются:

а) две окружности; б) два квадрата; в) две сферы; г) два куба?

A

410. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка $M(5; -1; 3)$ отобразилась на точку $N(2; 4; -1)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

411. Найдите координаты образа точки $A(-4; 10; 2)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{p} = (1; 3; -2)$.

412. Найдите координаты точки, в которую переходит точка $X(2; 3; -1)$ в результате параллельного переноса, отображающего начало координат в точку $A(1; 1; 2)$.

413. Найдите координаты точки, в которую переходит точка $M(3; -2; 1)$ в результате параллельного переноса на $\overrightarrow{OM}$, если O — начало координат.

414. Даны точки $K(1; 0; 0)$, $P(-1; 3; 0)$ и треугольник с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(-1; 0; 3)$, $C(0; 0; 1)$. Найдите координаты вершин треугольника, образованного в результате параллельного переноса на $\overrightarrow{KP}$ треугольника ABC .



415. Существует ли параллельный перенос, отображающий точку A на точку B , а точку M — на точку N , если:
 а) $A(1; 3; -2)$, $B(3; -2; 1)$, $M(4; 6; 2)$, $N(6; 1; 5)$;
 б) $A(5; 3; -2)$, $B(4; 8; -3)$, $M(1; 3; -9)$, $N(0; -2; -10)$?
416. Шестиугольник F_1 — проекция куба F . Можно ли считать, что фигуру F_1 получили в результате преобразования фигуры F ?
417. Можно ли параллельным переносом отобразить одну из скрещивающихся прямых на другую?
418. Сколькими параллельными переносами можно отобразить одну из двух параллельных прямых на другую?
419. Существует ли параллельный перенос, отображающий сторону: а) прямоугольника на противоположную ей сторону; б) равностороннего треугольника на другую его сторону?
420. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны и лежат в параллельных плоскостях. Можно ли один из них параллельным переносом отобразить на другой?
421. Докажите, что при параллельном переносе параллелограмм переходит в равный ему параллелограмм.

Б

422. При параллельном переносе тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ является образом тетраэдра $ABCD$ (рис. 83). Докажите, что высоты DO и D_1O_1 этих тетраэдров равны.
423. Постройте фигуру, на которую отображается тетраэдр $PABC$ параллельным переносом на $\overline{AB}$.
424. Дано изображение куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Постройте изображение фигуры, в которую переходит этот куб в результате параллельного переноса на $\overline{AB}$.
425. Докажите, что при параллельном переносе прямые, параллельные направлению переноса, переходят сами в себя.
426. Докажите, что при параллельном переносе плоскости, параллельные направлению переноса, переходят сами в себя.

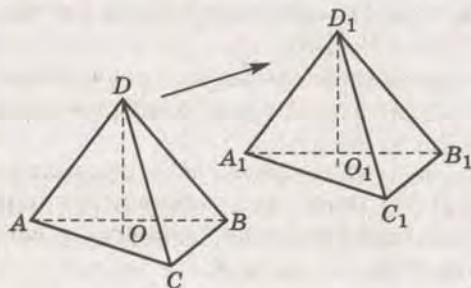


Рис. 83

427. Докажите, что если параллельный перенос отображает прямую a на b , то эти прямые параллельны или совпадают.
428. Докажите, что если параллельный перенос отображает плоскость α на β , то эти плоскости параллельны или совпадают.
429. Прямая a наклонена к плоскости α под углом 30° . Под каким углом наклонена к плоскости α прямая b , если она отображается на прямую a параллельным переносом?
430. Тетраэдр $ABCD$ параллельным переносом отображается на тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$. Следует ли из этого, что:
- их грани ABC и $A_1B_1C_1$ равны;
 - существует параллельный перенос, отображающий тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ на $ABCD$?
431. Один параллельный перенос отображает отрезок AB на A_1B_1 , а другой – отрезок A_1B_1 на A_2B_2 . Существует ли параллельный перенос, отображающий отрезок AB на A_2B_2 ?
432. Отрезок m параллельным переносом отображается на отрезок n . Равны ли их проекции на одну и ту же плоскость? Почему?

В

433. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ параллельным переносом на $\overline{AC_1}$ отображается на другой куб (рис. 84). Найдите наибольшее расстояние между точками этих двух кубов, если $AB = a$.

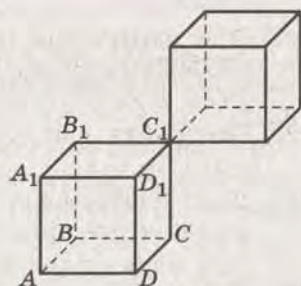


Рис. 84

434. При параллельном переносе точка $A(1; -2; 3)$ переходит в точку $B(2; 4; -1)$. В какую точку перейдет точка M , симметричная точке A относительно:
- начала координат;
 - плоскости yz ;
 - оси Ox ?
435. Напишите уравнение прямой, являющейся образом прямой AB при параллельном переносе на вектор $\vec{p} = (1; -1; 2)$, если $A(3; -2; 1)$, $B(1; 4; -2)$.
436. Напишите уравнение плоскости, являющейся образом плоскости $x + y - 2z + 4 = 0$ при параллельном переносе на вектор $\vec{s} = (2; -1; 3)$.
437. Точка M – середина высоты DO правильного тетраэдра $ABCD$. Постройте тетраэдр, являющийся образом данного тетраэдра при параллельном переносе на вектор:
- $\overline{AO}$;
 - $\overline{OM}$;
 - $\overline{AM}$.



438. Задайте направление параллельного переноса, чтобы сечением куба и его образа были:
- а) квадрат; б) точка; в) прямоугольный параллелепипед; г) куб.



Упражнения для повторения

439. Дана точка $A(1; -2; 3)$. Найдите координаты точки, симметричной данной относительно: а) начала координат; б) координатных плоскостей; в) координатных осей.
440. Как найти ось поворота, отображающего некоторую точку A на точку B ? Сколько решений имеет задача?
441. Ортогональной проекцией треугольника является треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Найдите площадь данного треугольника, если угол между плоскостью треугольника и плоскостью проекции равен 60° .



КОМПОЗИЦИИ ДВИЖЕНИЙ И РАВЕНСТВО ФИГУР

До сих пор мы рассматривали отдельные виды движений. Заслуживают внимания и их *композиции* – последовательные выполнения одного геометрического преобразования за другим. Например, если симметрия относительно плоскости α отображает данную фигуру F на фигуру F_1 , а симметрия относительно плоскости α_1 – фигуру F_1 на F_2 , то отображение фигуры F на F_2 называют *композицией двух симметрий* относительно данных плоскостей. Если плоскости α и α_1 параллельны, то эта композиция – параллельный перенос, отображающий фигуру F на F_2 (рис. 85). Если плоскости α и α_1 пересекаются по прямой l , то композиция таких двух симметрий является пово-

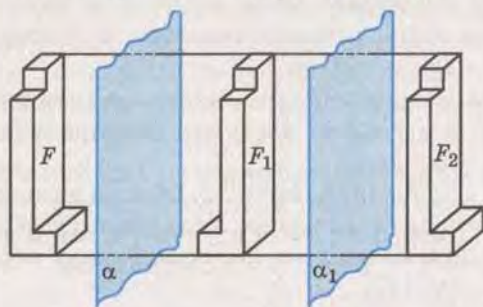


Рис. 85



ротом фигуры F вокруг прямой l (рис. 86). В частности, если $\alpha \perp \alpha_1$, то композиция двух рассматриваемых симметрий – поворот вокруг прямой l на 180° , т. е. симметрия относительно оси l .

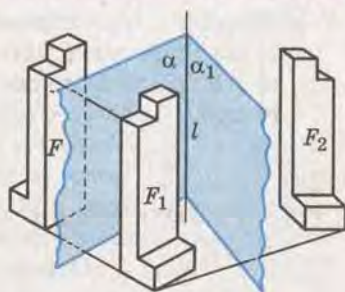


Рис. 86

Некоторые композиции имеют специальные названия. Композицию поворота вокруг прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой называют *винтовым движением*. Композицию поворота

вокруг прямой и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной к этой прямой, называют *зеркальным поворотом*.

Различают движения *первого* и *второго* рода.

Движения, сохраняющие ориентации базисов, называют *движениями первого рода* (параллельный перенос и поворот вокруг прямой). Движения первого рода могут быть реализованы непрерывным перемещением фигур в пространстве. Композиция любого числа движений первого рода – движение первого рода.

Движения, изменяющие ориентации базисов, называют *движениями второго рода* (симметрия относительно точки и относительно плоскости). Поскольку каждое движение второго рода изменяет ориентацию фигуры, то композиция четного числа таких движений – движение первого рода, а композиция нечетного числа движений второго рода – движение второго рода.

Движения первого и второго родов рассматривают и в планиметрии. Движение плоскости первого рода является или поворотом, или параллельным переносом; движение плоскости второго рода является композицией симметрии относительно прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой (теорема Шаля).

В пространстве движений больше. Но все их можно свести к композиции симметрий относительно плоскости. Любое движение пространства первого рода – композиция двух или четырех симметрий относительно плоскости; движение пространства второго рода является или симметрией относительно плоскости, или композицией трех таких симметрий.

ЗАМЕЧАНИЕ. Симметрия относительно точки на плоскости – движение первого рода, а в пространстве – движение второго рода. Симметрия относительно прямой на плоскости – движение второго рода, а в пространстве – движение первого рода.

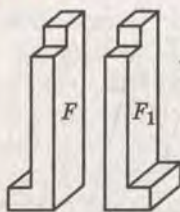


Рис. 87

С геометрическими движениями тесно связано понятие *равенства фигур*. Две фигуры называют *равными*, если существует движение, отображающее одну из них на вторую. Имеют в виду движения и первого рода, и второго, и любые их композиции. Хотя деталь F (см. рис. 87) нельзя заменить деталью F_1 , но в геометрии такие фигуры считаются равными.

Отношение равенства геометрических фигур *транзитивно*, – если первая фигура равна второй, а вторая – третьей, то первая и третья фигуры также равны.

С равными материальными предметами придется иметь дело многим рабочим. Современная промышленность производит большие партии геометрически равных изделий. Равны все заготовки, вылитые из одной формы, все детали, изготовленные станком-автоматом по одной программе. Для многих изделий существуют специальные Государственные стандарты. Служба стандартизации обязывает выпускать такие изделия по установленным стандартам, геометрично равные друг другу.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что понимают под композицией движений?
2. Приведите примеры композиций движений.
3. Какую композицию называют винтовым движением? А зеркальным поворотом?
4. Какие движения называют движениями первого рода? Приведите примеры.
5. Какие движения называют движениями второго рода? Приведите примеры.
6. Какие две фигуры называют равными?



Выполним вместе

1. Докажите, что композиция двух симметрий относительно двух пересекающихся плоскостей является поворотом. Найдите ось и угол этого поворота.

РЕШЕНИЕ. Пусть даны плоскости α и β , пересекающиеся по прямой l , а угол между ними равен φ . A – некоторая точка пространства, которая при симметрии относительно плоскости α отображается в точку A_1 , которая при симметрии относительно плоскости β отображается в точку A_2 (рис. 88). Представьте, что через прямые AA_1 и A_1A_2

проведена плоскость γ . Она перпендикулярна к l (почему?). Пусть O – точка пересечения прямой l и плоскости γ .

Рассмотрим $\triangle AOA_1$. Поскольку точки A и A_1 симметричны относительно плоскости α , то $AM_1 = M_1A_1$ и $OM_1 \perp AA_1$. Поэтому, $\triangle AOA_1$ – равнобедренный и $OA = OA_1$. Аналогично $OA_1 = OA_2$. Из чего следует, что $OA = OA_2$. А это означает, что отобразить точку A в точку A_2 можно поворотом вокруг оси l .

Определим угол поворота. Пусть $\angle AOM_1 = \angle M_1OA_1 = \varphi_1$ и $\angle A_1OM_2 = \angle M_2OA_2 = \varphi_2$. Тогда $\angle AOA_2 = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 2(\varphi_1 + \varphi_2) = 2\varphi$.

Следовательно, композицией двух симметрий относительно плоскостей α и β , пересекающихся по прямой l под углом φ , является поворот вокруг прямой l на угол 2φ .

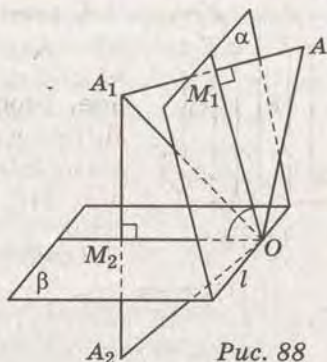


Рис. 88

2. $ABCA_1B_1C_1D_1$ – куб. Докажите равенство пирамид AA_1BD и $C_1CB_1D_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O – середина диагонали AC_1 куба. В результате симметрии относительно точки O вершины пирамиды AA_1BD отображаются на вершины пирамиды $C_1CD_1B_1$ (рис. 89). Эти пирамиды симметричны относительно точки O и, следовательно, равны.

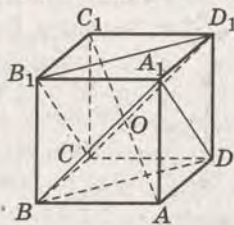


Рис. 89

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



442. Приведите примеры равных фигур из окружающей среды.
443. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. M, N, K, P, F – середины соответствующих ребер (рис. 90). Найдите образ:

- точки A при композиции параллельного переноса на вектор $\overline{BC}$ и симметрии относительно точки P ;
- точки C при композиции поворота вокруг прямой BB_1 на угол 90° и симметрии относительно плоскости MNK ;

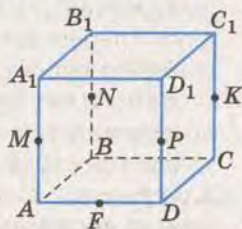


Рис. 90



- в) отрезка AA_1 при композиции параллельного переноса на вектор $\overline{AC}$ и поворота вокруг прямой DD_1 на угол 45° .
444. Используя условие предыдущей задачи укажите, каким одним движением можно заменить в каждом случае заданные композиции.
445. Дана точка $M(1; 2; 3)$. Найдите координаты точки, в которую отобразится точка M при композиции таких движений:
- а) симметрий относительно начала координат и плоскости xu ;
 - б) симметрий относительно плоскостей xu и yz ;
 - в) симметрии относительно оси Ox и параллельного переноса на вектор $\vec{a} = (1; 1; 1)$.
- A**
446. Начертите произвольный отрезок AB и точку O ($O \notin AB$). Постройте образ отрезка AB при композиции центральной симметрии относительно точки O и поворота на угол 90° вокруг прямой, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости AOB .
447. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $M \in AA_1$, $AM : MA_1 = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точку M перпендикулярно к AA_1 . Постройте образ этого параллелепипеда при композиции параллельного переноса на вектор $\overline{AC}$ и симметрии относительно плоскости α .
448. Дана точка $A(1; -2; 5)$. Найдите координаты образа этой точки при композиции центральной симметрии относительно точки M и параллельного переноса на вектор $\vec{s} = (-1; 2; 4)$, если: а) $M(0; 0; 0)$; б) $M(3; 4; -1)$.
449. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 9$. Напишите уравнение сферы, являющейся образом данной при композиции центральной симметрии относительно начала координат и симметрий относительно плоскостей xu и xz .
450. Даны два равных отрезка с общим концом. Какими движениями можно отобразить один из них на второй?
451. Даны два равных куба с одной общей гранью. Какими движениями их можно совместить?
452. Куб F_1 образовался в результате поворота куба F на 90° вокруг его ребра. Какими еще движениями можно отобразить куб F на F_1 ?
453. Пусть $ABCD$ – правильный тетраэдр. Какими движениями можно отобразить: а) ребро AB на CD ; б) грань ABC на грань ABD ; в) высоту AA_1 на высоту BB_1 ?

454. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Какими движениями можно отобразить: а) ребро AB на ребро $C_1 D_1$; б) ребро AB на ребро CC_1 ; в) грань $ABCD$ на грань $A_1 B_1 C_1 D_1$; г) грань $ABCD$ на грань $AA_1 B_1 B$; д) диагональ AC_1 на диагональ $B_1 D$?

Б

455. Может ли композиция двух поворотов быть поворотом? А параллельным переносом или симметрией относительно плоскости?
456. Может ли композиция поворота вокруг прямой и симметрии относительно точки быть параллельным переносом?
457. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом. Найдите вектор, который задает этот перенос.
458. Докажите, что композиция симметрий относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей является осевой симметрией.
459. Докажите, что у правильной четырехугольной пирамиды диагональные сечения равны.
460. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины трех его параллельных ребер. Докажите, что эта плоскость рассекает параллелепипед на равные многогранники. Является ли она плоскостью симметрии данного параллелепипеда?
461. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен 2φ . Верно ли, что сечение, проведенное через сторону основания под углом φ к плоскости основания, рассекает данную пирамиду на две равные части?
462. Плоскость проходит через апофему правильной треугольной пирамиды и противоположное боковое ребро. Докажите, что эта плоскость рассекает данную пирамиду на два равных тетраэдра. Каким движением можно отобразить один из этих тетраэдров на второй?

В

463. В каждом из двух тетраэдров длина одного ребра a , а остальных – b . Равны ли эти тетраэдры?
464. В каждом из двух тетраэдров три ребра имеют длину a и три – длину b . Равны ли эти тетраэдры?
465. Диагонали параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . Равны ли пирамиды $OABCD$ и $OA_1 B_1 C_1 D_1$? А пирамиды $OABCD$ и $OABB_1 A_1$?



466. Верно ли, что диагональное сечение параллелепипеда разбивает его на две равные призмы?
467. K, P, T, M, N – середины ребер AB, AC, AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$. Докажите равенство тетраэдров $AKPT$ и $TMND$.
- 468*. Докажите, что когда луч падает на систему из трех попарно перпендикулярных зеркал, то он возвращается к своему источнику (принцип действия углового отражателя).
- 469*. Установите и докажите свойства винтового движения.
- 470*. Сформулируйте и докажите важнейшие свойства зеркального поворота.



Упражнения для повторения

471. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка $M(5; -3; 4)$ отобразилась на точку $N(1; -2; 3)$. Найдите вектор параллельного переноса и образ точки $A(4; 7; -2)$ при этом переносе.
472. Докажите, что когда ограниченная фигура имеет центр симметрии и ось симметрии, то центр симметрии лежит на оси симметрии.
473. Диагональ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна d . Найдите площадь $\triangle BC_1 D_1$.



ГОМОТЕТИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

Пусть даны точка O , число k и фигура F . Преобразование, в результате которого каждая точка X фигуры F отображается на такую точку X_1 , что $\vec{OX}_1 = k\vec{OX}$, называется *гомотетией относительно центра O с коэффициентом k* (рис. 91). Если все найденные таким способом точки X_1 образуют фигуру F_1 , говорят, что данная гомотетия отображает фигуру F на F_1 . Фигура F_1 называется *гомотетичной фигуре F относительно центра O с коэффициентом k* .

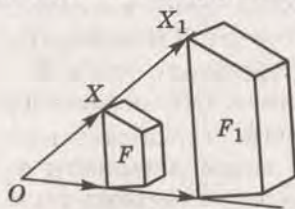


Рис. 91

Коэффициент гомотетии может быть любым действительным числом $k \neq 0$. Если $k = 1$, фигура F отображается на себя. Если $k = -1$, фигура F отображается на фигуру F_1 , симметричную F относительно точки O . Симметрия относительно точки – отдельный случай гомотетии.

Если коэффициент гомотетии k отличен от 1 и -1 , она не сохраняет расстояний между точками, не является движением. Но при гомотетии соответствующие расстояния умножаются на одно и то же число. В результате изменяются размеры фигуры, но ее форма не изменяется.

Теорема 13. *Гомотетия отображает прямую, которая не проходит через центр гомотетии, на параллельную ей прямую.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O и k – центр и коэффициент гомотетии, a – данная прямая, которая не проходит через точку O (рис. 92). Все точки, гомотетичные точкам прямой a относительно центра O , лежат на лучах, выходящих из O и пересекающих a . Все эти лучи лежат в одной плоскости, проходящей через O и a . Как известно из планиметрии, гомотетия плоскости отображает прямую a на параллельную ей прямую a_1 . Следовательно, и гомотетия пространства отображает прямую a на параллельную ей прямую a_1 . Теорема доказана.

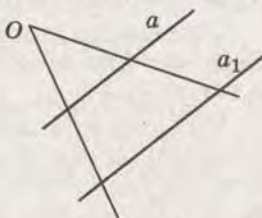


Рис. 92

Теорема 14. *Гомотетия отображает плоскость, которая не проходит через центр гомотетии, на параллельную ей плоскость.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O и k – центр и коэффициент гомотетии, α – плоскость, которая не проходит через точку O (рис. 93). Опустим перпендикуляр OA на плоскость α и на прямой OA обозначим точку A_1 такую, что $\overline{OA_1} = k\overline{OA}$. Рассмотрим плоскость α_1 , которая параллельна α и проходит через точку A_1 . Если B – любая точка плоскости α , то прямая OB пересекает плоскость α_1 в такой точке B_1 , что $\triangle OBA \sim \triangle OB_1A_1$. Следовательно, $OB_1 : OB = OA_1 : OA$, $\overline{OB_1} = k\overline{OB}$. Этим доказано, что данная гомотетия отображает каждую точку B плоскости α на некоторую точку B_1 плоскости α_1 . И наоборот: если B_1 – произвольная точка плоскости α_1 , то прямая OB_1 пересекает плоскость α в такой точке B , что $OB_1 = kOB$. Следовательно, при рассматриваемой гомотетии каждая точка плоскости α_1 является образом некоторой точки плоскости α . Теорема доказана.

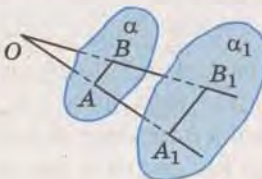


Рис. 93



Плоскость или прямая, которая проходит через центр гомотетии, отображается этой гомотетией на себя.

Композицию движения и гомотетии называют *преобразованием подобия*. Если фигура F равна F_1 , а F_1 гомотетична фигуре F_2 , то говорят, что преобразование подобия отображает фигуру F на F_2 . Фигуру F называют *подобной* F_2 , и наоборот. Пишут $F \sim F_2$ или $F_2 \sim F$.

Равенство фигур и гомотетия – отдельные случаи преобразования подобия. Если фигуры гомотетичны, они подобны. Но не всегда подобные фигуры гомотетичны. Чтобы две подобные фигуры стали гомотетичными, их надо соответствующим образом расположить в пространстве.

Отношение подобия фигур *транзитивное*: если первая фигура подобна второй, а вторая – третьей, то первая и третья фигуры подобны.

Признаки подобия, доказанные в планиметрии для треугольников одной плоскости, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях. Подобными могут быть и неплоские фигуры. Например, любых два куба подобны друг другу. То же можно сказать о двух правильных тетраэдрах, двух шарах и т. п.

Пусть ребро одного куба в 3 раза длиннее ребра другого. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго? В 9 раз. В общем, площади поверхностей подобных тел относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.



Теорема 15. *Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, гомотетично этому основанию относительно вершины пирамиды. Площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.*

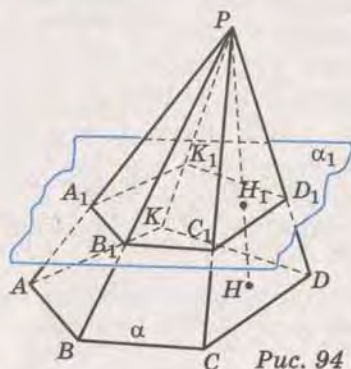


Рис. 94

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $РАВС...К$ – произвольная пирамида, а параллельная ее основанию плоскость α_1 пересекает пирамиду по многоугольнику $A_1B_1C_1...K_1$ (рис. 94). Гомотетия с центром P и коэффициентом $k = PA_1 : PA$ отображает точку A на A_1 , а плоскость основания α на параллельную ей плоскость α_1 . Поскольку через точку A_1 проходит единственная плоскость, параллельная основа-

нию, то многоугольник $ABC...K$ этой гомотетией отображается на многоугольник $A_1B_1C_1...K_1$.

Следовательно, многоугольники $ABC...K$ и $A_1B_1C_1...K_1$ подобны, отношение их площадей равно k^2 . Если PH и PH_1 — перпендикуляры к плоскостям α и α_1 , то $\triangle PAH \sim \triangle PA_1H_1$, откуда $PH_1 : PH = k$. Следовательно, если площадь сечения равна S_1 , а площадь основания пирамиды S , то $S_1 : S = k^2 = PH_1^2 : PH^2$. Это и надо было доказать.

Свойства подобных фигур в пространстве часто используют в моделировании. Например, прежде чем строить самолет, корабль, плотину, завод, создают уменьшенные в несколько раз подобные им модели. На этих моделях выясняют особенности сооружений и своевременно устраняют дефекты проектов.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какое преобразование пространства называется гомотетией?
2. Какие значения может принимать коэффициент гомотетии?
3. При каких значениях коэффициента k гомотетия является движением?
4. Сформулируйте и докажите свойства гомотетии.
5. Какое преобразование пространства называется преобразованием подобия?
6. Какие фигуры называются подобными?
7. Укажите свойства преобразования подобия.



Выполним вместе

1. Докажите, что при гомотетии с коэффициентом k расстояние между точками изменяется в $|k|$ раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и их образы при гомотетии с коэффициентом k — точки $A'(x'_1; y'_1; z'_1)$ и $B'(x'_2; y'_2; z'_2)$. Рассмотрим гомотетию с центром в начале координат. По определению гомотетии $\vec{OA'} = k\vec{OA}$. Тогда $x'_1 = kx_1$, $y'_1 = ky_1$ и $z'_1 = kz_1$. Аналогично $x'_2 = kx_2$, $y'_2 = ky_2$ и $z'_2 = kz_2$. Рассмотрим расстояния AB и $A'B'$.

$$A'B' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(kx_2 - kx_1)^2 + (ky_2 - ky_1)^2 + (kz_2 - kz_1)^2} = \\
 &= \sqrt{k^2((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)} = \\
 &= |k| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |k| \cdot AB.
 \end{aligned}$$

Следовательно, расстояние между точками A и B и их образами — точками A' и B' — изменяется в k раз.

2. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Через точку M , лежащую на высоте пирамиды, проведена плоскость параллельно основанию. В каком отношении точка M делит высоту пирамиды, если площадь сечения равна $\frac{28}{3}$ см²?

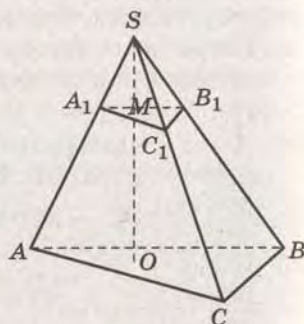


Рис. 95

РЕШЕНИЕ. Пусть $SABC$ — заданная пирамида, $A_1B_1C_1$ — сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию (рис. 95). Найдём площадь $\triangle ABC$. Воспользуемся формулой Герона. Поскольку $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$, то $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

По теореме 15 $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{SM^2}{SO^2}$, тогда $\frac{SM^2}{SO^2} = \frac{28}{3 \cdot 84} = \frac{1}{9}$, откуда $\frac{SM}{SO} = \frac{1}{3}$.

Следовательно, $SM : MO = 1 : 2$.

ОТВЕТ. $SM : MO = 1 : 2$.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



474. Назовите примеры подобных фигур из окружающей среды.
 475. Все ли гомотетичные фигуры подобны?
 476. Всегда ли подобные фигуры гомотетичны?
 477. Назовите фигуры, которые всегда гомотетичны.

478. Назовите фигуры, которые всегда подобны. Какие из них гомотетичны?
479. Ребро правильного тетраэдра равно 4 см. Чему равно ребро тетраэдра, гомотетичного данному с коэффициентом гомотетии k , если:

а) $k = 2$; б) $k = -\frac{1}{2}$; в) $k = 1$; г) $k = -2$?

А

480. Постройте фигуру, гомотетичную данному $\triangle ABC$ относительно данной точки P с коэффициентом гомотетии $k = 2$.
481. Постройте фигуру, гомотетичную данному тетраэдру $ABCD$ относительно его вершины D , если коэффициент гомотетии $k = 0,5$.
482. Даны тетраэдр $ABCD$ и точка P , симметричная точке A относительно B . Постройте фигуру, гомотетичную данному тетраэдру относительно центра P , если коэффициент гомотетии $k = -1$.
483. Постройте тетраэдр, гомотетичный тетраэдру $ABCD$ относительно его вершины A , если в результате этой гомотетии центроид грани ABC отображается на середину ребра BC . Найдите коэффициент гомотетии.
484. Постройте куб, гомотетичный данному кубу относительно его вершины с коэффициентом гомотетии $k = -2$.
485. Может ли одна из двух гомотетичных фигур лежать во внутренней области второй?
486. Как могут быть расположены две гомотетичные сферы?
487. Радиус одной из сфер является диаметром второй. Гомотетичны ли они? С каким коэффициентом гомотетии? Где находится центр гомотетии, если: а) центры сфер совпадают; б) сферы имеют внутреннее касание; в) сферы имеют внешнее касание?
488. Напишите уравнение сферы, гомотетичной сфере $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 4$ с центром в начале координат и коэффициентом: а) $k = 3$; б) $k = -2$.
489. Напишите уравнение плоскости, гомотетичной плоскости $2x + y - 3z + 6 = 0$ с центром гомотетии в начале координат и коэффициентом: а) $k = 2$; б) $k = -3$.

Б

490. Докажите, что прямая, проходящая через центр гомотетии, отображается этой гомотетией на себя.
491. Докажите, что плоскость, проходящая через центр гомотетии, отображается этой гомотетией на себя.



492. Гомотетичны ли два куба, если они симметричны:
а) относительно плоскости их общей грани; б) относительно прямой, содержащей их общее ребро?
493. Могут ли быть гомотетичными друг другу два треугольника, лежащих в перпендикулярных плоскостях?
494. Докажите, что композицией двух гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2 является гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k = k_1 \cdot k_2$.
495. Сколько существует гомотетий, отображающих один из двух неравных параллельных отрезков на другой?
496. Две окружности радиуса r и R лежат в разных параллельных плоскостях (рис. 96). Сколько существует центров гомотетий, отображающих одну окружность на другую? Чему при этом равен коэффициент гомотетии?
497. Найдите координаты точки, в которую отображается точка $A(1; 0; 2)$ гомотетией с коэффициентом $k = 10$ относительно: а) начала координат; б) точки $B(2; 0; 0)$.
498. Относительно каких центров и с какими коэффициентами гомотетичны треугольники с вершинами $A(0; 0; 1)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$ и $A_1(0; 0; 4)$, $B_1(0; 4; 0)$, $C_1(0; 0; 4)$?
499. Найдите координаты вершин тетраэдра, гомотетичного тетраэдру с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-1; 2; -3)$, $D(4; 0; 5)$ относительно начала координат с коэффициентом гомотетии $k = 5$.
500. Тетраэдр $OABC$ задан координатами своих вершин: $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$. Найдите координаты вершин тетраэдра, гомотетичного данному:
а) с центром O и $k = -1$; б) с центром A и $k = 2$.
501. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее высоту в отношении $2 : 3$ (считая от вершины). Найдите площадь сечения, зная, что она меньше площади основания на 84 см^2 .
502. Боковое ребро пирамиды разделили на 10 равных частей и через точки деления провели плоскости, параллельные основанию. Найдите площади сечений, если площадь основания пирамиды равна S .

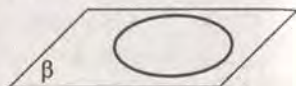
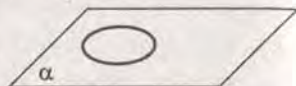


Рис. 96

В

503. Докажите, что композиция двух преобразований подобия с коэффициентами k_1 и k_2 является подобием с коэффициентом $k = k_1 \cdot k_2$.

504. Даны две правильные четырехугольные призмы. Сторона основания одной в 2 раза длиннее ее бокового ребра, а сторона основания другой в 2 раза короче ее бокового ребра. Подобны ли эти призмы?
505. A_1, B_1, C_1, D_1 – центры граней правильного тетраэдра $ABCD$. Докажите, что тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – подобны, и найдите коэффициент подобия.
506. Через вершину S пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, провели плоскость, которая делит основание на два равных параллелограмма, подобных данному. Найдите отношение сторон основания. При каких условиях образованные пирамиды будут равными? Будут ли подобными данная пирамида и образованные?
507. Плоскость, параллельная боковой грани правильной треугольной призмы, отсекает от нее меньшую треугольную призму. Подобны ли эти призмы?
- 508*. Все грани тетраэдра – подобные между собой прямоугольные треугольники. Найдите отношение наибольшего и наименьшего ребер этого тетраэдра.
509. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Сделайте из провода модели подобных ломаных из трех попарно перпендикулярных звеньев и расположите их в пространстве так, чтобы они были гомотетичными.



Упражнения для повторения

510. Даны точки $A(3; -4; 1)$ и $B(1; -2; 7)$. Приведите примеры движений, которые отображают одну точку в другую.
511. Дана точка $M(2; 4; 3)$. Найдите точку, являющуюся образом точки M при повороте на 90° вокруг оси Ox .
512. Прямые a и b и прямые b и c скрещивающиеся. Следует ли из этого, что прямые a и c скрещивающиеся?

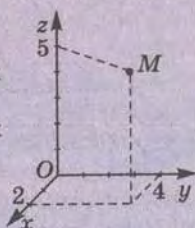


ЗАДАЧИ ПО ГОТОВЫМ РИСУНКАМ

А

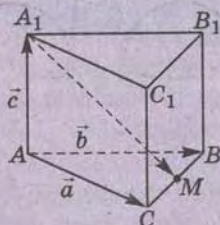
Найдите расстояние от точки M до:

- а) $O(0; 0; 0)$;
б) координатных плоскостей;
в) координатных осей.



$$CM = MB.$$

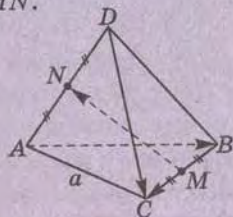
Разложите $\overrightarrow{A_1M}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



$ABCD$ – правильный тетраэдр.

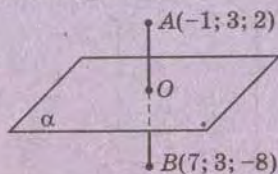
Найдите:

- а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$;
в) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN}$.

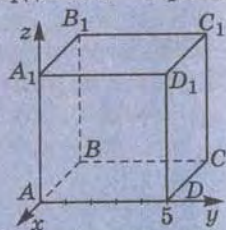


$$AO = OB, AB \perp \alpha.$$

Запишите уравнение α .

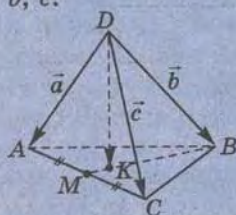
**Б**

Найдите координаты вершин куба.



$$MK : KB = 1 : 3.$$

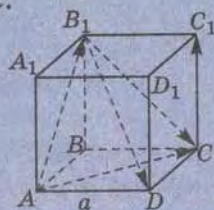
Разложите вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

 π

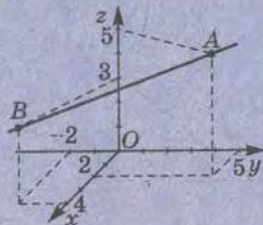
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

Найдите:

- а) $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{B_1C}$;
в) $\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{AC}$.

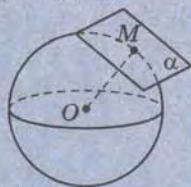


Запишите уравнение прямой AB .

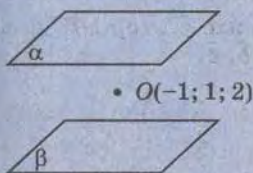
 π

А

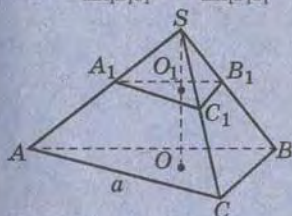
Плоскость α – касательная к сфере в точке $M(2; -1; 4)$; $O(1; -2; 3)$.
Напишите уравнение α .



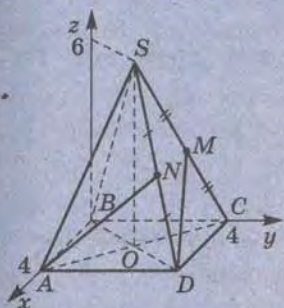
α и β симметричны относительно точки O ; $\alpha: x - 2y + 3z - 4 = 0$.
Напишите уравнение β .



$SABC$ – правильный тетраэдр, $SO_1 : O_1O = 2 : 3$; $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$.
Найдите $P_{\Delta A_1B_1C_1}$ и $S_{\Delta A_1B_1C_1}$.

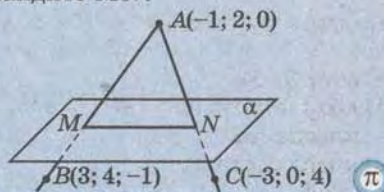


$SABCD$ – правильная пирамида.
Найдите угол между AN и DM .

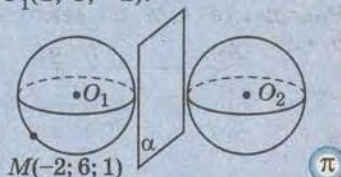


Б

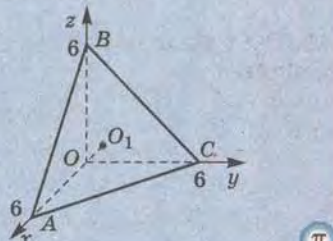
$\alpha: 2x + y - z + 10 = 0$.
Найдите MN .



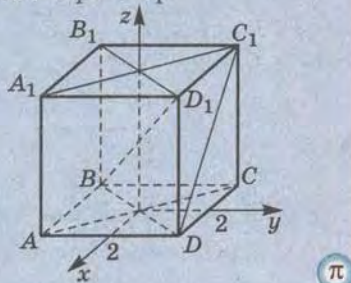
Сферы O_1 и O_2 симметричны относительно $\alpha: x + y - z + 3 = 0$.
Напишите уравнение сферы O_2 , если $O_1(1; 3; -2)$.



OO_1 – высота тетраэдра $OABC$.
Найдите OO_1 .



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
Найдите угол и расстояние между BD_1 и DC_1 .



ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Даны точки $A(0; -3; 2)$ и $B(4; 0; -2)$. Середина отрезка AB принадлежит:
 - а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) оси Oz ; г) плоскости xy .
2. Найдите расстояние от точки $A(3; 4; -3)$ до оси Oz .
 - а) 3; б) 5; в) $2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{34}$.
3. При каком значении m коллинеарны векторы $\vec{a} = (m^2; 3; -4m-3)$ и $\vec{b} = (3; 4; 2m+7)$?
 - а) 1,5; б) -1,5; в) -1,5 или 1,5; г) -0,5 или 0,5.
4. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $AB = 1$. Вычислите $(\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{BB}_1$.
 - а) 1; б) 0; в) -1; г) 0,5.
5. Найдите координаты единичного вектора, сонаправленного с вектором $\vec{m} = (2; -1; 2)$.
 - а) $(1; -\frac{1}{2}; 1)$; б) $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$; в) $(-1; -\frac{1}{2}; -1)$; г) $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.
6. При каких значениях p угол между векторами $\vec{a} = (1; 1; 0)$ и $\vec{b} = (0; 4; p)$ равен 60° ?
 - а) 4; б) -4 или 4; в) 16; г) -16 или 16.
7. Укажите уравнение сферы с центром в точке $(0; -1; 0)$, касающейся плоскости $y = 2$.
 - а) $x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4$; б) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$;
в) $x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$; г) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$.
8. Какая из точек симметрична точке $M(-1; 2; -4)$ относительно плоскости yz ?
 - а) $(1; -2; 4)$; б) $(1; 2; -4)$; в) $(-1; -2; -4)$; г) $(-1; 2; 4)$.
9. Какая из плоскостей симметрична относительно начала координат плоскости $x + y - 2z + 5 = 0$?
 - а) $-x + y - 2z + 5 = 0$; б) $x + y - 2z - 5 = 0$;
в) $x - y + 2z - 5 = 0$; г) $x + y - 2z + 5 = 0$.
10. Плоскости α и β заданы соответственно уравнениями $x + y - 2z + 3 = 0$ и $2x + 2y - 4z + 9 = 0$. Каково взаимное расположение прямых $a \subset \alpha$ и $b \subset \beta$?
 - а) Пересекаются или параллельны; б) параллельны;
в) параллельны или скрещиваются; г) пересекаются.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

- 1°. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(-1; 3; 2)$ относительно точки $Q(3; -1; 4)$.
- 2°. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(2; -1; 3)$, $B(1; -1; 2)$, $C(4; 5; -2)$, $D(4; 4; -1)$.
- 3°. Найдите длину медианы BM $\triangle ABC$, заданного координатами своих вершин $A(-2; 3; 5)$, $B(1; -3; 2)$ и $C(4; -3; 1)$.
- 4°. Составьте уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка MN перпендикулярно к нему, если $M(-1; 2; 4)$, $N(3; 0; 6)$.
- 5°. Напишите уравнение сферы с центром в точке $A(1; -2; 3)$, проходящей через точку $M(3; -2; 4)$, и сферы, образованной параллельным переносом данной на вектор $\vec{p} = (-2; 1; -1)$.
- 6°. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $A(7; 6; 8)$, $B(2; 8; 6)$, $C(3; 4; 2)$, $D(8; 2; 4)$.
- 7°. В каком отношении плоскость $z = 1,5$ делит диаметр сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, проходящей через точку $A(0; 4; 3)$?
- 8°. На прямой l взят вектор $\overrightarrow{AB} = (3; 4; -5)$. Найдите угол между прямой l и плоскостью xy .
- 9°. Найдите координаты вектора $\vec{c}$ такого, что $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $|\vec{c}| = 2\sqrt{3}$, если $\vec{a} = (1; -2; 2)$, $\vec{b} = (2; 3; -1)$.
- 10°. Докажите, что композиция двух симметрий относительно плоскостей $y = x$ и $y = -x$ является поворотом. Укажите ось и угол этого поворота.
- 11°. Даны точки $A(1; 2; -3)$, $B(2; -3; 1)$ и плоскость $2x - y - 3z + 1 = 0$. Найдите:
 - а) уравнение прямой AB ;
 - б) точку пересечения прямой AB с плоскостью;
 - в) уравнение плоскости, симметричной данной плоскости относительно точки B ;
 - г) уравнение прямой, симметричной прямой AB относительно заданной плоскости.
- 12°. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $A(0; 0; 0)$, $B(-2; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$. Найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1 и расстояние между ними.

¹²Задачи с отметкой ** только для учеников профильных классов.

ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 1

1. Прямоугольная система координат дает возможность установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками действительных чисел. $A(x; y; z)$ – точка с абсциссой x , ординатой y и аппликатой z .

2. Квадрат расстояния между двумя точками равен сумме квадратов разности их соответствующих координат.

3. Квадрат длины отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на три взаимно перпендикулярные прямые.

4. Если точка $C(x; y; z)$ – середина отрезка с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

5. Уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

6. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n}(a; b; c)$, –

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

7. Уравнение сферы радиуса r с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

с центром в точке $A(a; b; c)$ –

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

8. Прямую в трехмерном пространстве определяет система уравнений двух плоскостей.

9. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, –

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

10. Вектор – элемент векторного пространства. Изображать ненулевые векторы можно направленными отрезками. Любые векторы удобно представлять в координатной форме. Координатами вектора с началом в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом $B(x_2; y_2; z_2)$ называют числа $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$; $z = z_2 - z_1$. Записывают так: $\vec{AB} = (x; y; z)$.

11. Модулем вектора называют длину изображающего его направленного отрезка. Обозначают его символом $|\vec{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

12. Если $\vec{a} = (x; y; z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
13. Суммой двух векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ называют вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

14. Для сложения любых векторов правильны переместительный и сочетательный законы. Геометрически складывать векторы можно по правилу треугольника, параллелограмма или параллелепипеда.

15. Разность двух векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ можно находить, пользуясь равенством

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

16. Множить любой вектор $\vec{a} = (x; y; z)$ на произвольное действительное число k можно так: $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$.

17. Векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

18. Скалярным произведением двух векторов называют произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

19. Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

20. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

21. Если X – произвольная точка пространства, G – середина отрезка AB или точка пересечения медиан треугольника ABC , то соответственно

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}); \quad \overrightarrow{XG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$

22. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, гомотетично этому основанию относительно вершины пирамиды. Площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

Многогранные углы. Многогранники

Главные темы раздела:

- Двугранные углы.
- Трехгранные углы.
- Многогранные углы.
- Геометрические тела и многогранники.
- Призма.
- Параллелепипед.
- Пирамида и усеченная пирамида.
- Правильные многогранники.



РАЗДЕЛ 2

*Многогранники составляют, можно сказать,
центральный предмет стереометрии.*

А. Александров



ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ

Прямая на плоскости разбивает ее на две полуплоскости. Две полуплоскости с общей прямой, их ограничивающей, могут и не лежать в одной плоскости, а образовывать двугранный угол (рис. 97).

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей их ограничивающей прямой. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называют гранями, а прямую, их ограничивающую, — ребром двугранного угла.

Двугранный угол разбивает пространство на две области — внутреннюю и внешнюю. Объединение двугранного угла и его внутренней области также называют двугранным углом. Двугранный угол с ребром BC и точками A, D , принадлежащими его разным граням, обозначают $ABCD$.

Проведем из какой-либо точки C ребра двугранного угла в его гранях лучи CA и CD , перпендикулярные к ребру (рис. 98). Угол ACD , образованный этими лучами, называют *линейным углом* данного двугранного угла. Можно сказать и так: линейный угол двугранного угла — это угол, образованный пересечением данного двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к его ребру.

Мера линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла. Ведь если построить какой-либо второй линейный угол $A_1C_1D_1$ данного двугранного угла, он будет равен углу ACD , так как $C_1A_1 \parallel CA$ и $C_1D_1 \parallel CD$. Поэтому мера двугранного угла — мера его линейного угла.

Меру двугранного угла, образованного полуплоскостями α и β , обозначают так: $\widehat{\alpha\beta}$, а меру двугранного угла, изображенного на рисунке 97, — $ABCD$.

Двугранные углы можно сравнивать. Тот из двух двугранных углов считают большим, линейный угол которого боль-

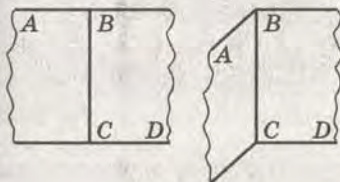


Рис. 97

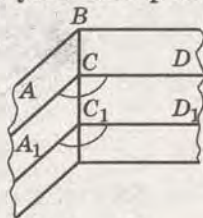


Рис. 98

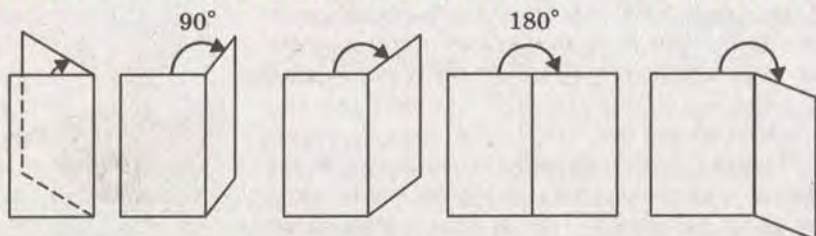


Рис. 99

ше. Двугранный угол называют острым, прямым, тупым, развернутым или больше развернутого в зависимости от того, острый, прямой, тупой, развернутый или больше развернутого его линейный угол (рис. 99).

Подобно углам в планиметрии, двугранные углы могут быть смежными (рис. 100) и вертикальными (рис. 101).

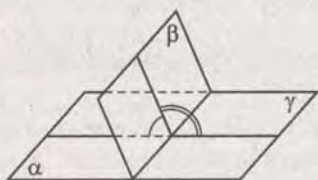


Рис. 100

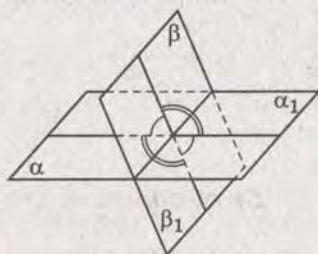


Рис. 101

При этом справедливы и аналогичные теоремы о мерах этих углов.

Полуплоскость, которая ограничена ребром двугранного угла и делит его на два равных двугранных угла, называется биссекторной полуплоскостью, или *биссектором* данного двугранного угла (рис. 102). На рисунке 102 биссектором двугранного угла $\alpha\beta$ является полуплоскость γ .

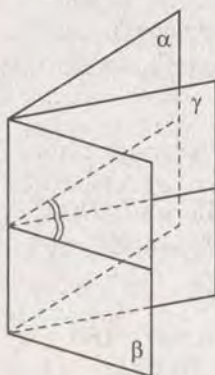


Рис. 102

Не следует отождествлять меру двугранного угла с углом между плоскостями. Угол между плоскостями может изменяться в пределах от 0 до 90° , а мера двугранного угла – от 0 до 360° .

Вместо «двугранный угол, мера которого равна α », часто говорят короче: «двугранный угол α ». В таких случаях под двугранным углом понимают и определенную фигуру, и соответствующую ей меру – значение величины.

Самыми простыми материальными моделями двугранного угла являются края режущих инструментов: зубил, стамесок, резцов для токарных станков и т. п. Они бывают более или менее острыми. Например, слесарное зубило для обработки алюминиевых сплавов затачивают под углом 35° , для латуни — 45° , для стали — 60° и более. Измеряют такие углы угломерами (рис. 103).



Рис. 103

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое двугранный угол? Назовите его элементы.
2. Что такое линейный угол двугранного угла?
3. Какими бывают двугранные углы?
4. Что такое биссектор двугранного угла? Каковы его свойства?
5. Какой фигурой может быть сечение двугранного угла плоскостью?



Выполним вместе

1. Найдите расстояние от основания высоты SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ до боковой грани, если $SO = h$, а двугранные углы при ребре основания равны α (рис. 104).

РЕШЕНИЕ. Проведем $OK \perp CD$ и точку K соединим с точкой S . Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp CD$. Следовательно, $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла при ребре CD , $\angle SKO = \alpha$.

В плоскости SOK проведем $OM \perp SK$. Поскольку плоскости SOK и SCD перпендикулярны, то OM — расстояние от точки O до грани SCD . Расстояние OM найдем с $\triangle SOM$, учитывая, что $\angle OSM = 90^\circ - \alpha$. Тогда $OM = SO \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$, или $OM = h \cos \alpha$.

ОТВЕТ. $OM = h \cos \alpha$.

2. Точка A находится внутри двугранного угла α ($\alpha < 180^\circ$) и удалена от граней угла на расстояния a и b . Найдите расстояние от точки A до ребра данного угла.

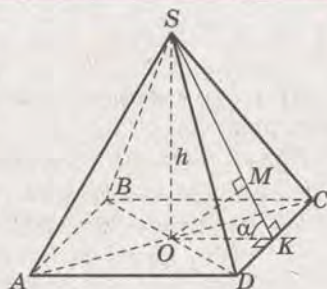


Рис. 104

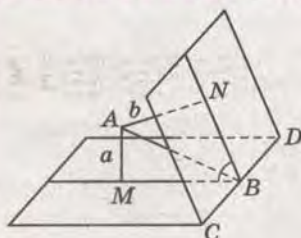


Рис. 105

РЕШЕНИЕ. Пусть точка A отдалена от граней двугранного угла с ребром CD на расстояния $AM = a$ и $AN = b$ (рис. 105).

Рассмотрим четырехугольник $AMBN$. Поскольку сумма его противоположных углов равна 180° , то вокруг него можно описать окружность. Эта окружность будет описанной и вокруг прямоугольного $\triangle AMB$, а поэтому ее

центр будет лежать на середине гипотенузы AB . Следовательно, искомое расстояние AB — диаметр окружности, описанной вокруг четырехугольника $AMBN$.

По следствию из теоремы синусов

$2R = \frac{MN}{\sin \alpha}$, так как эта окружность описана и вокруг $\triangle MBN$. Из $\triangle MAN$ по теореме косинусов найдем MN .

$$MN^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha.$$

$$\text{Тогда } AB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$$

$$\text{ОТВЕТ. } AB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$$

3. Чем является геометрическое место точек пространства, равноудаленных от граней острого двугранного угла?

РЕШЕНИЕ. Геометрическим местом точек двугранного угла, равноудаленных от его граней, является полуплоскость, которая выходит из ребра данного двугранного угла и делящая каждый его линейный угол пополам, т. е. биссекторная плоскость.

Если через ребро AB данного двугранного угла провести полуплоскости α_1 и β_1 , перпендикулярные соответственно к граням α и β данного двугранного угла, получим новый

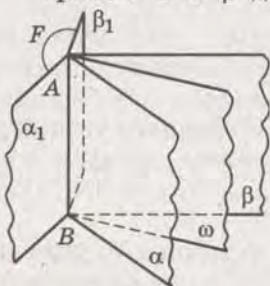


Рис. 106

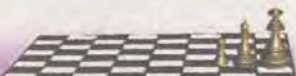
двугранный угол F (рис. 106). Каждая точка этого угла и его внутренней области также равноудалена от граней α и β данного двугранного угла.

Искомым геометрическим местом точек является объединение биссектора данного двугранного угла и двугранного угла F (вместе с его внутренней областью).



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



513. Найдите угол между прямыми, перпендикулярными к граням двугранного угла, мера которого 100° .
514. Угол между двумя плоскостями 47° . Найдите градусные меры двугранных углов, образованных пересечением этих плоскостей.
515. Дан двугранный угол, мера которого 52° . Чему равна мера смежного с ним двугранного угла? А вертикального?
516. Чему равен двугранный угол между биссекторами двух смежных двугранных углов?
517. Точка A лежит на биссекторе двугранного угла мерой 60° . Найдите расстояние от точки A до граней этого угла, если от ребра она отдалена на 10 см.
518. Точка M лежит в одной грани двугранного угла мерой 30° и отдалена от другой грани на 6 см. Найдите расстояние от точки M до ребра этого угла.
519. Дан тетраэдр $ABCD$ (рис. 107). Назовите линейные углы двугранных углов при ребрах AC , BC , BD , DA .

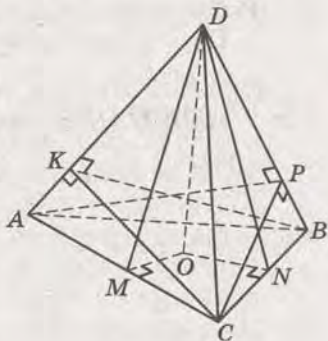


Рис. 107

520. Дан двугранный угол, мера которого 60° . Точка A , принадлежащая одной из его граней, удалена на 12 см от второй. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла.
521. Двугранный угол равен 45° . Точка B , принадлежащая одной из его граней, удалена от ребра на 8 дм. Найдите расстояние от точки B до второй грани.
522. Найдите меру двугранного угла, если расстояние от точки, взятой на одной его грани, до второй в 2 раза меньше расстояния от этой точки до ребра.
523. Из точек A и B одной грани острого двугранного угла опущены перпендикуляры AA_1 , BB_1 на вторую грань и AA_2 , BB_2 – на ребро. Найдите длину перпендикуляра BB_2 , если $AA_1 = 3$ дм, $AA_2 = 5$ дм, $BB_1 = 9$ дм.
524. Точка A удалена от граней прямого двугранного угла на 3 дм и 4 дм. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла.

525. Двугранный угол равен 60° . Из точки C на его ребре в гранях проведены перпендикулярные к ребру отрезки $CA = 3,2$ дм и $CB = 1,2$ дм. Найдите расстояние от A до B .

526. Длины перпендикуляров, опущенных из точки A на грани двугранного угла, равны по 36 см. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла, если его мера 120° .

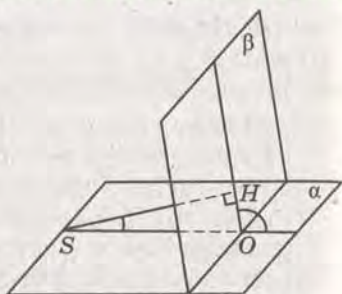


Рис. 108

527. Найдите меру двугранного угла, если точка P , лежащая внутри этого угла, удалена от его граней на m и $\sqrt{2}m$, а от ребра — на $2m$.
528. Расстояние между параллельными прямыми, лежащими в гранях двугранного угла, равно 13 см. Эти прямые удалены от ребра угла на 7 см и 8 см. Найдите меру этого двугранного угла.
529. Мера двугранного угла 100° . Найдите угол между плоскостью одной его грани и перпендикуляром ко второй грани (рис. 108).
530. На изображении правильного тетраэдра постройте изображение линейного угла одного из его двугранных углов.

Б

531. Докажите, что все двугранные углы правильного тетраэдра равны. Найдите меру двугранного угла правильного тетраэдра.
532. В правильной n -угольной пирамиде боковое ребро равно 5 см, а ребро основания 6 см. Найдите двугранные углы при основании, если: а) $n = 4$; б) $n = 3$.
533. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см, а все двугранные углы при основании равны. Найдите эти двугранные углы, если высота пирамиды равна 4 см.
534. Ребро SB пирамиды $SABCD$ перпендикулярно к плоскости основания $ABCD$ и равно BD . Найдите меры двугранных углов при ребрах AD , DC и SB , если $ABCD$:
- квадрат;
 - прямоугольник со сторонами 5 см и 12 см;
 - ромб, у которого $\angle BAD = 60^\circ$;
 - параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и углом $\angle ABC = 120^\circ$.

535. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Найдите меру двугранного угла $BAC_1 D$.
536. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB , AC и AD попарно перпендикулярны и равны. Найдите меры его двугранных углов при ребрах BC , CD , BD .
537. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро SB перпендикулярно к плоскости основания и равно ребру основания. Найдите меры двугранных углов при ребрах AB , AD , SD , SC .
538. Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является правильный треугольник со стороной a . Вершина B_1 проектируется в центр основания ABC . Найдите меру двугранного угла при ребре BC , если ребро BB_1 образует с плоскостью основания угол 45° .
539. Точка Q лежит внутри двугранного угла, мера которого 60° , и удалена от его граней на 3 см и 5 см. Найдите расстояние от точки Q до ребра этого угла.
540. Мера двугранного угла равна 60° . Расстояние между параллельными прямыми, лежащими в гранях этого угла, равно 14 см. Найдите расстояния от ребра двугранного угла до этих прямых, если одно из этих расстояний на 10 см больше другого.
541. Концы отрезка AB принадлежат разным граням двугранного угла мерой 120° и удалены от ребра на 6 см и 10 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек A и B к ребру, равно $12\sqrt{2}$ см. Найдите длину отрезка AB .
542. Концы отрезка лежат на гранях прямого двугранного угла и удалены от его ребра на 12 см и 16 см. Найдите расстояние от данного отрезка к ребру двугранного угла.

В

543. A и B – точки на ребре двугранного угла меры φ , AC и BD – перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях. Найдите расстояние CD , если $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$.
544. Концы отрезка AB лежат в гранях двугранного угла, а расстояния AM и BN от них до ребра равны. Докажите, что $\angle ABM = \angle BAN$.
- 545*. Параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = AC$ и $AB \perp AC$, согнули по диагонали AC так, что угол BAD стал 60° . Найдите меру двугранного угла, образованного плоскостями треугольников ABC и ADC .
546. Чем является геометрическое место точек острого двугранного угла, равноудаленных от его граней?

547. Чем является геометрическое место точек пространства, равноудаленных от граней двугранного угла?
- 548*. Докажите, что биссекторы всех двугранных углов любого тетраэдра проходят через одну точку.
549. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Сделайте из картона модель двугранного угла, обозначьте на нем его линейный угол.

Упражнения для повторения

550. При каком значении a справедливо равенство $\vec{m} \cdot \vec{n} = -5$, если $\vec{m} = (2; a; 5)$, $\vec{n} = (-3; 2; 1)$?
551. При параллельном переносе точка $A(-2; 3; 4)$ отображается на точку $A_1(1; 3; -2)$. На какую точку отобразится середина отрезка AA_1 ?
552. Докажите, что сумма расстояний от середины отрезка до плоскости, его пересекающей, равна модулю полуразности расстояний от концов отрезка до этой плоскости.

π



ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

Представьте фигуру, состоящую из трех углов AOB , BOC , COA , которые не принадлежат одной плоскости (рис. 109). Такую фигуру называют *трехгранным углом*, точку O — его *вершиной*, а данные углы — *гранями*, лучи OA , OB , OC — *ребрами*. Эта фигура разбивает пространство на две части. Объединение такой фигуры и одной из этих частей также называют *трехгранным углом*.

Если ребра трехгранного угла a , b , c , то соответствующие им двугранные углы обозначают буквами $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, а противоположные плоские углы — буквами α , β , γ .

Обычно рассматривают трехгранные углы, в которых каждый плоский угол меньше развернутого. При таком условии сумма всех трех плоских углов трехгранного угла больше 0 и меньше 360° . Каждый двугранный угол такого трехгранного угла может изменяться от 0 до 180° , но сумма всех трех двугранных углов трехгранного угла не может быть меньше 180° . Почему?

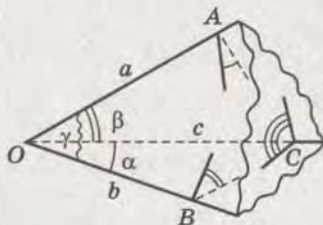


Рис. 109

Трехгранный угол называется прямым, если все его плоские углы прямые.

Теорема 16 (косинусов для трехгранного угла). Если α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, а $\hat{C}$ — его двугранный угол, противоположный γ , то

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \hat{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим сначала трехгранный угол $OABC$ с произвольным плоским углом $\gamma = \angle AOB$ и острыми углами $\alpha = \angle BOC$ и $\beta = \angle AOC$ (рис. 110). Через любую точку C луча OC проведем перпендикулярные к OC прямые, пересекающие лучи OA и OB в точках A и B . Угол ACB — линейный угол двугранного угла при ребре OC , поэтому $\angle ACB = \hat{C}$.

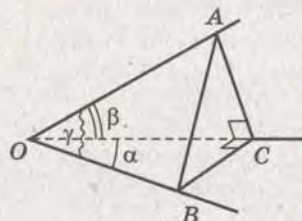


Рис. 110

Применим теорему косинусов к треугольникам AOB и ACB :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \gamma,$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos \hat{C},$$

откуда

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \gamma &= \\ &= CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos \hat{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{1}{2 \cdot OA \cdot OB} \left(OA^2 - CA^2 + OB^2 - CB^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos \hat{C} \right) = \frac{1}{2 \cdot OA \cdot OB} \left(2 \cdot OC^2 + 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos \hat{C} \right) = \\ &= \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} + \frac{CA}{OA} \cdot \frac{CB}{OB} \cos \hat{C} = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos \hat{C}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \hat{C}$.

Если $\alpha = \beta = 90^\circ$, то $\hat{C} = \gamma$. В этом случае равенство справедливо:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos 90^\circ \cdot \cos 90^\circ + \\ &+ \sin 90^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos \hat{C}. \end{aligned}$$

Если в трехгранном угле $OABC$ углы α и β тупые, то проведем луч OC_1 , который для OC является дополняющим (рис. 111). В трехгранном

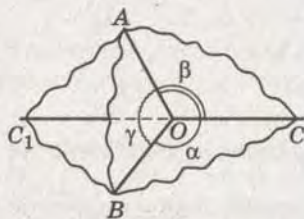


Рис. 111

π угле $OABC_1$ $\angle AOC_1 = 180^\circ - \beta$, $\angle BOC_1 = 180^\circ - \alpha$, $\angle AOB = \gamma$, а двугранный угол при ребре OC_1 равен $\hat{C}$. По доказанному выше

$$\cos \gamma = \cos(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \beta) + \sin(180^\circ - \alpha) \sin(180^\circ - \beta) \cos \hat{C}.$$

Отсюда $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \hat{C}$.

Аналогично можно доказать теорему для остальных случаев. Всегда

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \hat{C}.$$

Следствие. 1. Если $\hat{C} = 90^\circ$, то $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$. Если двугранный угол трехгранного угла прямой, то косинус противоположного плоского угла равен произведению косинусов двух других его плоских углов.

Это свойство называется теоремой о трех косинусах.

2. Поскольку $\cos \hat{C} > -1$, $\sin \alpha > 0$ и $\sin \beta > 0$, то

$$\cos \gamma > \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta).$$

Отсюда следует, что $\gamma < \alpha + \beta$, т. е. каждый плоский угол выпуклого трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Теорема 17. Сумма мер двугранных углов трехгранного угла больше 180° .

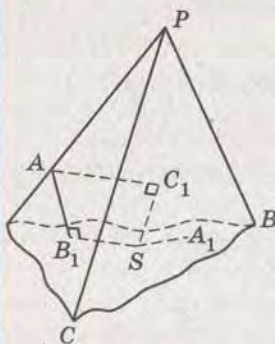


Рис. 112

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть двугранные углы трехгранного угла равны $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. Возьмем внутри трехгранного угла $PABC$ произвольную точку S и опустим перпендикуляры SA_1 , SB_1 , SC_1 на грани BPC , APC , APB соответственно (рис. 112). Обозначим $\angle B_1SC_1 = \alpha_1$, $\angle A_1SC_1 = \beta_1$, $\angle A_1SB_1 = \gamma_1$. Тогда $\alpha_1 = 180^\circ - \hat{A}$; $\beta_1 = 180^\circ - \hat{B}$; $\gamma_1 = 180^\circ - \hat{C}$. Имеем:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 540^\circ - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1).$$

Поскольку α_1 , β_1 , γ_1 — плоские углы трехгранного угла $SA_1B_1C_1$, то

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < 360^\circ, \text{ тогда } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ.$$

Следовательно, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое трехгранный угол? Назовите его элементы.
2. Сформулируйте и докажите теорему косинусов для трехгранного угла.
3. Сформулируйте и докажите теорему о трех косинусах.
4. Какие свойства имеют плоские углы трехгранного угла?
5. Какие свойства имеют двугранные углы трехгранного угла?
6. Какой трехгранный угол называют прямым?



Выполним вместе

1. В трехгранном угле два плоских угла по 45° , двугранный угол между ними – прямой. Найдите третий плоский угол.

РЕШЕНИЕ. Если $\hat{C} = 90^\circ$, то $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta = \cos 45^\circ \times \cos 45^\circ = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\gamma = 60^\circ$.

ОТВЕТ. 60° .

2. Точки A, B, C лежат на ребрах прямого трехгранного угла $OABC$. Может ли быть прямоугольным или тупоугольным $\triangle ABC$?

РЕШЕНИЕ. Используя теорему косинусов, имеем (рис. 113):

$$\begin{aligned} \cos \angle ACB &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \\ &= \frac{AO^2 + OC^2 + BO^2 + OC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{2OC^2}{2AC \cdot BC} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\angle ACB < 90^\circ$. Аналогично доказываем, что углы ABC и BAC также острые.

3. Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри трехгранного угла и равноудаленных от граней этого угла.

РЕШЕНИЕ. Геометрическим местом точек двугранного угла, равноудаленных от его граней, является биссектор, который делит пополам линейный угол этого двугранного угла (см. задачу 3 на с. 108).

Пусть биссекторы двух произвольных двугранных углов данного трехгранного угла пересекаются по лучу l , начало которого находится в вершине трехгранного угла. Тогда каждая точка этого луча будет равноудалена от плоскостей

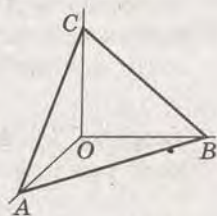


Рис. 113

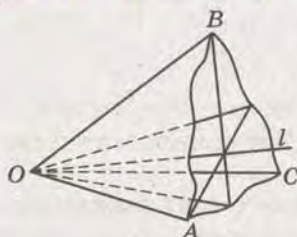


Рис. 114

всех трех граней данного трехгранного угла, а следовательно, биссектор третьего двугранного угла также проходит через луч l . Следовательно, искомым геометрическим местом точек является луч с началом в вершине трехгранного угла, по которому пересекаются биссекторы двугранных углов этого трехгранного угла (рис. 114).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно

553. Может ли сумма плоских углов трехгранного угла быть равной 90° ; 120° ; 180° ; 360° ? А быть больше 360° ?
554. Два плоских угла трехгранного угла равны 65° и 95° . В каких пределах может изменяться мера третьего плоского угла?
555. Два плоских угла трехгранного угла имеют меры по 110° . В каких пределах может изменяться мера третьего плоского угла?
556. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами: а) 45° ; 80° ; 130° ; б) 76° ; 34° ; 110° ; в) 20° ; 60° ; 70° ?
557. Могут ли двугранные углы трехгранного угла быть равными: а) 50° ; 80° ; 90° ; б) 70° ; 60° ; 40° ; в) 120° ; 100° ; 70° ?
558. Существует ли трехгранный угол, каждый двугранный угол которого равен 60° ?
559. Существует ли плоскость, перпендикулярная ко всем граням трехгранного угла?
560. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами: а) 30° , 45° и 60° ; б) 20° , 30° и 60° ?
561. Сумма всех плоских углов трехгранного угла равна 180° . Докажите, что все эти плоские углы острые.

А

562. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Докажите, что и все его двугранные углы прямые.
563. Докажите, что если двугранные углы трехгранного угла равны, то каждый из них больше 60° .
564. Найдите двугранные углы трехгранного угла, если каждый его плоский угол равен 60° .
565. У трехгранного угла плоские углы равны 45° , 45° и 60° . Найдите его двугранные углы.

566. Плоские углы трехгранного угла равны 120° , 120° и 90° . Найдите двугранный угол, противоположный меньшему плоскому углу.
567. У трехгранного угла $OABC$ $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$ и $OA = a$. Найдите расстояние от точки A до плоскости угла BOC .
568. Все плоские углы трехгранного угла $OABC$ равны 60° . Найдите угол между ребром OA и плоскостью угла BOC .
569. У трехгранного угла $PABC$ $\angle BPC = 90^\circ$, а ребро PA образует с плоскостью этого угла угол 45° . Найдите $\angle APB$ и $\angle APC$, если известно, что они равны.
570. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Внутри его из вершины проведен отрезок, проекции которого на ребра равны 2 см, 3 см и 6 см. Найдите длину этого отрезка.
571. Внутри прямого трехгранного угла взята точка M , которая удалена от ребер этого угла на 12 см, 16 см и 12 см. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

Б

572. Докажите, что в трехгранном угле напротив равных плоских углов лежат равные двугранные углы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
573. $OABC$ – прямой трехгранный угол (все его плоские углы – прямые). $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Найдите площадь треугольника ABC .
574. Внутри трехгранного угла с плоскими углами 90° , 90° и 120° взята точка, удаленная от граней этого угла на 12 см, 12 см и 2 см. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла (рис. 115).
575. Внутри прямого трехгранного угла $OABC$ взята точка P , удаленная от граней угла на 6 см, 8 см и 24 см. Найдите углы, которые образует прямая OP с гранями и ребрами данного трехгранного угла.
576. Внутри трехгранного угла, все плоские углы которого равны 60° , взята точка, удаленная от всех граней на 2 см. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.
577. Внутри трехгранного угла, все плоские углы которого равны 60° , взята точка, удаленная от всех ребер этого угла на a . Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

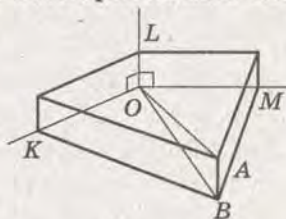


Рис. 115

578. Каждый плоский угол трехгранного угла равен α . Найдите угол между его ребром и биссектрисой противоположного плоского угла.

В

- 579*. Двугранные углы трехгранного угла равны 90° , $\hat{A}$ и $\hat{A}$. Найдите его плоские углы.
580. Докажите, что если все двугранные углы трехгранного угла равны, то равны и все его плоские углы.
581. Найдите плоские углы трехгранного угла, если каждый его двугранный угол равен 120° .
582. Из точки A , не принадлежащей плоскости, проведены две взаимно перпендикулярные наклонные AB и AC , образующие с плоскостью углы 15° и 75° . Найдите углы B и C $\triangle ABC$.
583. Плоские углы трехгранного угла равны 60° , 60° и 90° . Докажите, что плоскость, отсекающая от ребер угла равные отрезки, перпендикулярна к плоскости прямого угла.
584. Докажите, что все три биссектора двугранных углов трехгранного угла имеют общую прямую.
585. Имеют ли общую прямую плоскости, проходящие через ребра непрямого трехгранного угла перпендикулярно к противоположным граням?
586. Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его ребер.
587. Докажите, что для плоских углов любого трехгранного угла имеет место неравенство

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha + 1 > 0.$$



Упражнения для повторения

588. Чему равен угол между ребром двугранного угла и произвольной прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?
589. В разных гранях двугранного угла взяты точки A и B . Точка A удалена от ребра на $7,5$ см, а от противоположной грани — на 6 см. Найдите расстояние от точки B до противоположной грани, если от ребра она удалена на 10 см.
590. Расстояние от центра основания правильной четырехугольной пирамиды до бокового ребра равно d . Найдите двугранный угол при боковом ребре и при ребре основания пирамиды, если сторона основания равна $2d$.



МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Пусть F – произвольный многоугольник, а O – точка, не принадлежащая его плоскости. Фигура, которая состоит из всех лучей, выходящих из точки O и пересекающих многоугольник F , называется *многогранным углом* (рис. 116). Лучи OA , OB , ..., OK – его *ребра*, плоские углы AOB , BOC , ..., KOA – *грани*, а точка O – *вершина* данного многогранного угла.

В зависимости от количества граней различают трехгранные, четырехгранные, ..., n -гранные углы.

Угловыми элементами многогранного угла являются его плоские и двугранные углы. Например, в четырехгранном угле $OABCD$ есть четыре плоских угла AOB , BOC , COD , DOA и четыре двугранных угла $DOAB$, $AOBC$, $BOCD$ и $CODA$ (рис. 117).

Многогранный угол разбивает пространство на две области – внутреннюю и внешнюю. Объединение многогранного угла с его внутренней областью также называют многогранным углом.

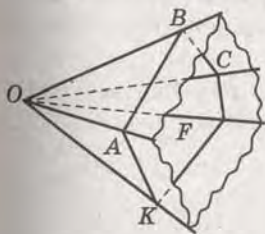


Рис. 116

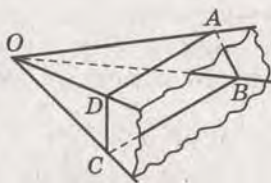


Рис. 117

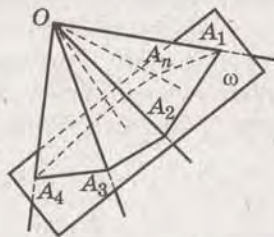


Рис. 118

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Мы будем рассматривать в основном выпуклые многогранные углы. Самый простой из многогранных углов – *трехгранный угол*.

Теорема 18. У выпуклого многогранного угла сумма плоских углов меньше 360° .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем какую-либо плоскость ω , пересекающую все ребра данного n -гранного угла. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – точки ее пересечения с ребрами многогранного угла (рис. 118). Многоугольник $A_1A_2A_3\dots A_n$ – выпуклый, сумма всех его плоских углов равна $180^\circ(n - 2)$.

Рассмотрим трехгранные углы $A_2OA_1A_3$, $A_3OA_2A_4$, ..., $A_1OA_nA_2$. Пусть S – сумма их плоских углов, не являющихся углами многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$. Поскольку плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов, то $S > 180^\circ(n - 2)$.

Если σ – сумма всех плоских углов данного n -гранного угла, то $\sigma + S$ – сумма всех углов n треугольников: $\sigma + S = 180^\circ n$. Следовательно, $S = 180^\circ n - \sigma$, $180^\circ n - \sigma > 180^\circ(n - 2)$, откуда $\sigma < 360^\circ$. Это и надо было доказать.

π Многогранные углы – отдельные виды телесных углов. Представьте сферу с центром O , а на ней линию L , ограничивающую часть сферы. Множество всех лучей, выходящих из центра сферы и пересекающих линию L , – это *телесный угол* (рис. 119). Объединение такого телесного угла с частью пространства, ограничивающего его, также называют телесным углом. Это понятие часто рассматривают в оптике.

Каждый телесный угол имеет определенную меру. Единицей меры телесного угла является 1 *стерадиан*. Это – телесный угол, который на сфере радиуса r с центром в его вершине вырезает фигуру площадью r^2 . Поскольку площадь всей сферы радиуса r равна $4\pi r^2$, то прямой трехгранный угол (он вырезает восьмую часть сферы) имеет $0,5\pi$ стерадианов (рис. 120). Прямой двугранный угол вырезает четвертую часть сферы (рис. 121), поэтому он имеет π стерадиан. Как видим, двугранные углы могут считаться отдельными видами углов многогранных.

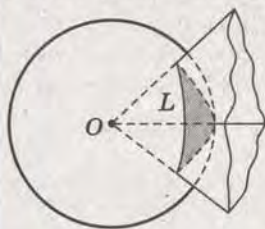


Рис. 119

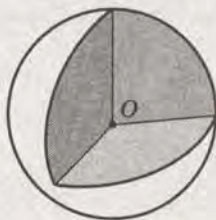


Рис. 120

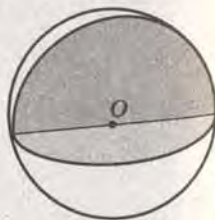


Рис. 121

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое многогранный угол? Назовите его элементы.
2. Какие многогранные углы называют выпуклыми?
3. Сформулируйте теорему о плоских углах выпуклого многогранного угла.
4. Как можно обобщить понятие многогранного угла?
5. Как измеряют телесные углы? Что такое стерадиан?



Выполним вместе

1. Многогранный угол, все плоские углы которого равны и все двугранные углы равны, называют *правильным*. Каким может быть плоский угол правильного многогранного угла? А двугранный угол?

РЕШЕНИЕ. Представим многогранный угол при вершине правильной n -угольной пирамиды (рис. 122). Если высоту такой пирамиды уменьшать, то ее боковые грани будут приближаться к плоскости основания. При этом каждый двугранный угол будет стремиться к 180° , а сумма плоских углов — к 360° . Следовательно, плоский угол правильного n -гранного угла больше 0° и меньше $360^\circ : n$.

Двугранный угол правильного n -гранного угла меньше 180° , но больше $180^\circ(n - 2) : n$. Последний результат следует из теоремы 17.

2. Сколько плоскостей симметрии имеет правильный 5-гранный угол? А правильный 6-гранный угол?

РЕШЕНИЕ. Правильный n -гранный угол имеет столько плоскостей симметрии, сколько правильный n -угольник имеет осей симметрии (рис. 123). Следовательно, правильный 5-гранный угол имеет 5 плоскостей симметрии, а 6-гранный — 6.

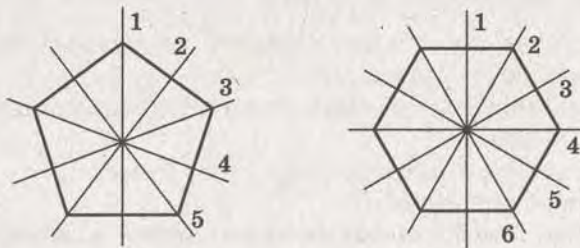


Рис. 123

3. Существует ли: а) невыпуклый трехгранный угол; б) шестигранный угол, все 6 плоских углов которого прямые?

РЕШЕНИЕ. а) Существует. Например при вершине B_1 невыпуклой призмы (рис. 124, а).

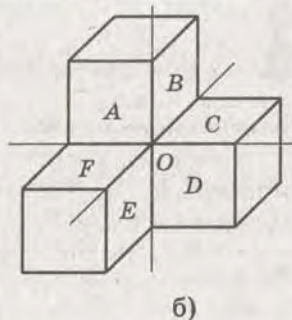
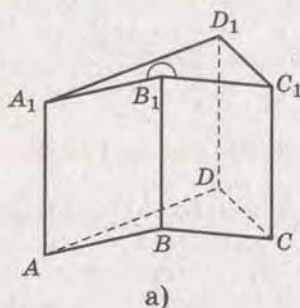


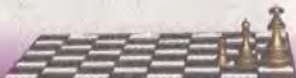
Рис. 124

б) Представим фигуру, образованную из трех равных кубов (см. рис. 124, б). Объединение прямых углов, которым принадлежат грани A, B, C, D, E, F кубов, образует шестигранный угол, каждый плоский угол которого – прямой. Три его двугранных угла прямые, а три – по 270° .



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



591. Многогранный угол имеет n ребер. Сколько он имеет: вершин; граней; двугранных углов?
592. Существует ли выпуклый четырехгранный угол, плоские углы которого $30^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ и 100° ?
593. Ученик утверждает, что если все плоские углы многогранного угла равны, то равны и все его двугранные углы. Верно ли это для трехгранного угла? А для n -гранного угла, где $n > 3$?

А

594. Существует ли четырехгранный угол, каждый плоский угол которого – прямой?
595. Сколько плоскостей симметрии имеет правильный семигранный угол?
596. Существует ли пятигранный угол, имеющий только одну плоскость симметрии?
597. Могут ли иметь плоскости симметрии невыпуклые многогранные углы?
598. Существует ли четырехгранный угол, плоские углы которого равны $n^\circ, 2n^\circ, 3n^\circ, 4n^\circ$? Каким может быть n ?
599. Сколько существует разных четырехгранных углов, плоские углы которых равны $n^\circ, n^\circ, n^\circ, 2n^\circ$? Каким наибольшим может быть значение n ?

600. Известно, что четырехгранный угол имеет только одну плоскость симметрии, а два его плоских угла — 30° и 40° . Найдите меры двух других его плоских углов.
601. Каким может быть двугранный угол правильного четырехгранного угла?
602. У каких многогранных углов каждый двугранный угол прямой?
603. Каждый плоский угол правильного четырехгранного угла равен 60° . Найдите меры его двугранных углов.
604. Каждый двугранный угол правильного пятигранного угла равен 150° . Найдите меры его плоских углов.

Б

605. Как прямой трехгранный угол можно разрезать на три равных четырехгранных угла? Найдите меры плоских (и двугранных) углов такого четырехгранного угла.
606. Сколькими способами правильный прямоугольный трехгранный угол можно разрезать на четыре равных трехгранных угла?
607. Правильный октаэдр (рис. 125) имеет 8 граней, каждая из которых — правильный треугольник. Сколько он имеет многогранных углов? Охарактеризуйте их.
608. Существует ли четырехгранный угол с плоскими углами 40° , 70° , 110° и 140° ? А выпуклый четырехгранный угол?
609. Докажите, что если все плоские углы четырехгранного угла равны, то:
а) каждый его двугранный угол равен противоположному;
б) плоскости, проходящие через его противоположные ребра, перпендикулярны.
610. Докажите, что выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, что в сечении образуется параллелограмм.

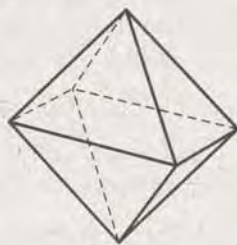


Рис. 125

611. Исследуйте, в каких случаях в сечении четырехгранного угла плоскостью можно получить прямоугольник; квадрат; ромб.
- 612*. Докажите, что во всяком многогранном угле каждый плоский угол меньше суммы остальных его плоских углов.
613. Как изменяются линейные и двугранные углы многогранного угла при гомотетии с коэффициентом $k \neq 1$?

614. Аналогично углам на плоскости сформулируйте определение вертикальных многогранных углов.
615. Сформулируйте определение равенства многогранных углов.
616. Докажите, что два любых вертикальных многогранных угла равны.
617. Каким движением один из двух вертикальных многогранных углов можно отобразить на другой?
618. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Сделайте из плотной бумаги модели трехгранного и четырехгранного углов.



Упражнения для повторения

619. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через внутреннюю точку грани ABD параллельно прямым CB и CD .
620. Сколько общих точек имеют сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и:
- $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$;
 - $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 18$;
 - $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$?
621. Определите взаимное расположение прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости: а) $2x + y - z - 7 = 0$; б) $x - 2y + 4z - 6 = 0$; в) $3x - y - 3z - 8 = 0$.



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА

В дальнейшем будем изучать свойства фигур, которые называются *геометрическими телами*. Содержание этого понятия раскроем, основываясь на понятиях «шар», «пространственная область» и др.

Каждая сфера разбивает пространство на две области: внутреннюю, содержащую центр сферы, и внешнюю. Объединение сферы с ее внутренней областью называется *шаром*. *Центром* и *радиусом шара* называют соответственно центр и радиус сферы, его ограничивающей. Шар – самый простой пример геометрического тела; его внутренняя область – внутренняя область сферы – пример пространственной области.

Сама сфера – поверхность этой пространственной области и поверхность шара.



Обобщим этот пример. Точка A неплюской фигуры называется *внутренней*, если существует шар с центром в этой точке, полностью принадлежащей данной фигуре (рис. 126). Фигура называется *пространственной областью*, если все ее точки внутренние и любые две из них можно соединить ломаной, полностью принадлежащей данной фигуре. Точка B пространства называется *границной* для данной области, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие области, так и не принадлежащие ей. Фигура называется *ограниченной*, если расстояние между любыми двумя ее точками не превышает некоторого определенного конечного расстояния. Например, трехгранный угол – фигура неограниченная, а тетраэдр – ограниченная.

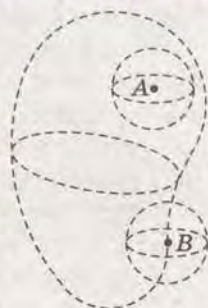
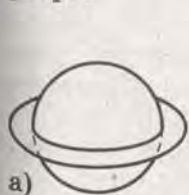


Рис. 126

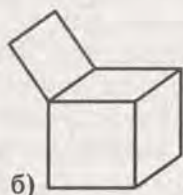
Ограниченная пространственная область вместе со всеми ее граничными точками называется геометрическим телом; множество всех ее граничных точек – поверхность этого геометрического тела.

Поскольку никаких других тел, кроме геометрических, в геометрии не рассматривают, дальше мы их будем называть просто *телами*.

Такие фигуры, как куб, параллелепипед, тетраэдр, – тела. Каждое из них состоит из некоторой пространственной области и всех ее предельных точек. Ни одна линия или поверхность не содержит пространственной области, поэтому не является телом. Но не каждая фигура, содержащая пространственную область, является телом. Например, объединение шара и плоского кольца, куба и отрезка или какой-либо плоской фигуры (рис. 127) – не тело, потому что многие точки этих фигур не принадлежат ни пространственной области, ни ее границе. Не является телом и фигура, содержащая несколько пространственных областей (рис. 128). Расстояние между наиболее отдаленными точками тела называют его *диаметром*. Например, диаметром куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является расстояние AC_1 , диаметром правильного тетраэдра – длина его ребра.



а)



б)

Рис. 127

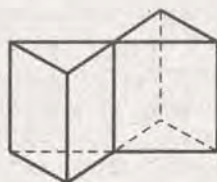


Рис. 128

Введем еще понятие опорной плоскости тела.

Если тело имеет с плоскостью хотя бы одну общую точку и расположено от нее с одной стороны, такую плоскость называют *опорной* к этому телу (рис. 129). Например, опорными к тетраэдру являются: плоскость любой его грани, плоскость, проходящая через вершину или ребро тетраэдра, но не пересекающая его. Каждая плоскость, имеющая с шаром только одну общую точку, опорная к нему.



Рис. 129

Материальной моделью геометрического тела является физическое тело. Пространственную область можно только представить: часть тела без всей его поверхности. Если фигуры F и F_1 не имеют общих точек и по крайней мере одна из них — пространственная область, то эти фигуры не имеют ближайших точек (см. следующую задачу и рис. 130).



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое пространственная область геометрической фигуры? Каждая ли геометрическая фигура ее имеет?
2. Что такое геометрическое тело? Приведите примеры.
3. Какие точки пространственной области называются ее предельными точками?
4. Что такое поверхность геометрического тела?
5. Что такое опорная плоскость геометрического тела?



Выполним вместе

Даны шар и точка A , не принадлежащая ему. Существует ли точка внутренней области шара, ближайшая к A ? Почему?

РЕШЕНИЕ. Пусть даны шар с центром в точке O и точка A , не принадлежащая шару (рис. 130). Если отрезок OA пересекает поверхность шара в точке M , то кратчайшее расстояние от точки A до шара равно MA . Но точка M не принадлежит внутренней области шара.

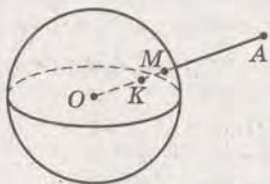


Рис. 130

Предположим, что существует точка K внутренней области шара, ближайшая к точке A . Тогда середина K_1 отрезка KM также принадлежит внутренней области данного шара и находится ближе

к точке A , чем K . Следовательно, предположение приводит к противоречию. Поэтому во внутренней области шара не существует точки, ближайшей к данной точке A .

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



622. Приведите примеры тел из окружающей среды.
 623. Приведите примеры фигур, которые не являются телом.
 624. Является ли телом двугранный или многогранный угол?
 625. Являются ли телом вертикальные двугранные углы? А смежные?
 626. Является ли телом проекция какого-либо тела на плоскость?
 627. Является ли телом изображенная на рисунке 131 фигура, состоящая из пяти квадратов? Почему?

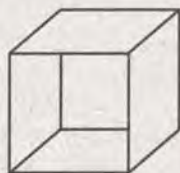


Рис. 131

А

628. Является ли телом фигура, состоящая из двух равных кубов, у которых общая:
 а) вершина; б) ребро; в) грань; г) диагональ?
 Сделайте соответствующие рисунки. Ответ обоснуйте.
 629. Является ли телом фигура, состоящая:
 а) из двух шаров, которые не имеют общих точек;
 б) из двух шаров, которые имеют одну общую точку;
 в) из двух шаров, которые пересекаются;
 г) из пересечения двух шаров, имеющих разные радиусы и общий центр?
 Сделайте соответствующие рисунки. Ответ обоснуйте.
 630. Дана точка O и расстояние r ($r > 0$). Чем является множество всех точек X пространства, удовлетворяющих условию $OX \leq r$?
 631. Определите сферу, шар и внутреннюю область шара с помощью неравенств.
 632. Чем является множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют условию:
 а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$; в) $x^2 + y^2 + z^2 < 4$?
 Какая из этих трех фигур является геометрическим телом, какая – пространственной областью?
 633. Изобразите в декартовой системе координат фигуру, координаты которой удовлетворяют условию: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Является ли эта фигура пространственной областью? А телом?

634. Является ли телом фигура, координаты которой удовлетворяют условию $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$, $0 \leq z < 1$? А пространственной областью?
635. Является ли телом фигура, координаты которой удовлетворяют условию $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$? А пространственной областью?
636. Даны шар и точка A , ему не принадлежащая. Существует ли точка шара, ближайшая к точке A ? Как ее найти?
637. Найдите диаметр куба, ребро которого равно $\sqrt{3}$ см.
638. Найдите диаметр прямоугольного параллелепипеда, если длины трех его ребер равны a , b , c .

Б

639. Расстояние между параллельными опорными плоскостями к кубу равно h . Найдите предел значений h , если ребро куба равно a .
640. Чему равно расстояние между параллельными опорными плоскостями, проведенными к шару:
- $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 \leq 25$;
 - $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z \leq 5$?
641. Можно ли провести опорную плоскость к шару $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ через точку $(-2; 1; 3)$?
642. Изобразите две фигуры и расположите их так, чтобы:
- их объединение было телом;
 - их пересечение было телом;
 - их объединение не было телом;
 - их пересечение не было телом.
643. Постройте тетраэдр, симметричный правильному тетраэдру $ABCD$ относительно середины его высоты DO . Будет ли телом:
- объединение;
 - пересечение данного и построенного тетраэдров?
644. Найдите расстояние между двумя шарами, если радиус каждого равен 3, а их центры – точки $O(0; 2; 0)$ и $O_1(0; 9; 0)$.

В

645. Существуют ли ближайшие точки внутренних областей шаров, описанных в задаче 644?
646. Является ли телом фигура, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$?
647. Найдите диаметр тетраэдра $OABC$, вершины которого находятся в точках $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ и $C(0; 0; 2)$.

648. Ребро SB пирамиды $SABCD$ перпендикулярно к плоскости основания. Найдите диаметр пирамиды, если $SB = AB = a$ и:
 а) $ABCD$ – квадрат; б) $ABCD$ – ромб, $\angle ABC = 120^\circ$.
649. Найдите диаметр параллелепипеда, все грани которого – ромбы со стороной a и углом 60° .
650. Расстояние между параллельными опорными плоскостями к правильному тетраэдру равно h . Найдите пределы значений h , если ребро тетраэдра равно a .
651. Напишите уравнение опорной плоскости, проведенной к шару $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y \leq 20$ в точке $A(4; -2; 4)$.
652. Тетраэдр $OABC$ задан координатами вершин: $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Напишите уравнение опорных плоскостей, проходящих через грани тетраэдра.

Упражнения для повторения

653. У трехгранного угла $OABC$ $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол между ребром AO и плоскостью угла BOC .
654. Плоские углы AOB и AOC трехгранного угла $OABC$ равны. Докажите, что проекцией ребра OA на грань BOC является биссектриса $\angle BOC$.
655. Найдите угол между плоскостями $4x - 3y - z + 2 = 0$ и $x - 4y - 3z - 5 = 0$.



МНОГОГРАННИКИ

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются **гранями**. Стороны граней – **ребра**, а их концы – **вершины** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, – **диагональ** многогранника (рис. 132).

Место многогранников в системе геометрических фигур показано на схеме.

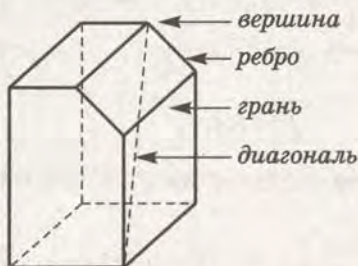


Рис. 132



Как и другие геометрические фигуры, многогранники бывают *выпуклые* и *невыпуклые*. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с каждыми двумя своими точками она содержит и отрезок, их соединяющий. Каждый тетраэдр, куб, параллелепипед – многогранники выпуклые. А многогранники на рисунке 133 – невыпуклые. Выпуклый многогранник расположен с одной стороны от плоскости каждой его грани. Если многогранник невыпуклый, плоскости некоторых его граней пересекают его на части (рис. 134). Каждая грань выпуклого многогранника – выпуклый многоугольник.

Если поверхность многогранника разрезать по нескольким его ребрам и разложить на плоскости, получим *развертку* данного многогранника. Поверхность одного и того же многогранника можно развернуть по-разному. На рисунке 135 показаны некоторые развертки куба.

Площадь поверхности многогранника – это сумма площадей всех его граней. Она равна площади развертки данного многогранника.

На с. 92 речь шла о подобных пирамидах. Подобными могут быть также многогранники других видов. Два многогранника называются *подобными*, если один из них можно отобразить на другой каким-либо преобразованием подобия, т. е. композицией гомотетии и движения. Например, если много-

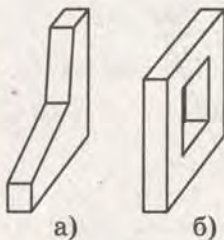


Рис. 133

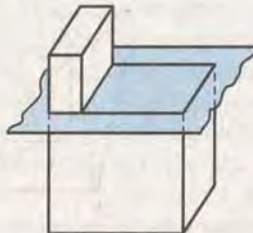


Рис. 134

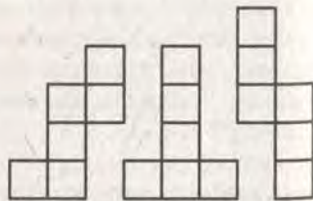


Рис. 135

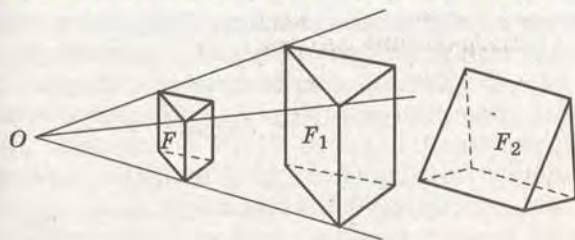


Рис. 136

гранник F гомотетией отображается на F_1 , а F_1 движение отображает на F_2 , то каждый из этих трех многогранников подобный каждому из двух других (рис. 136). Поскольку все линейные размеры фигуры гомотетия изменяет в том же отношении k , то отношение площадей гомотетичных граней равно k^2 . Поэтому *площади поверхностей подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров*. Например, если отношение соответствующих ребер двух подобных тетраэдров равно k , то отношение площадей поверхностей этих тетраэдров равно k^2 .

Интересную теорему о соотношении между числом граней f , ребер k и вершин e доказал Л. Эйлер.

Теорема 19. Для любого выпуклого многогранника $e + f - k = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан произвольный выпуклый многогранник, у которого f граней, k ребер и e вершин (рис. 137). Определим двумя способами сумму всех его плоских углов. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_f$ — числа сторон в 1-й, 2-й, 3-й, ..., f -й грани. Тогда сумма всех плоских углов данного многогранника в радианах:

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha &= (a_1 - 2)\pi + (a_2 - 2)\pi + \dots + (a_f - 2)\pi = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_f)\pi - 2f\pi. \end{aligned}$$

Поскольку каждое ребро многогранника является стороной двух граней, то $a_1 + a_2 + \dots + a_f = 2k$ и $\Sigma \alpha = 2\pi(k - f)$.

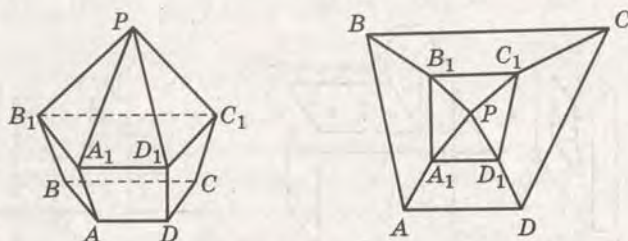


Рис. 137

Вычислим сумму $\Sigma\alpha$ другим способом. Для этого деформируем данный многогранник, не изменяя значений f , k и e . Возьмем одну из его граней за основание и мысленно растянем ее так, чтобы проекции всех других ребер многогранника оказались во внутренней области этого основания. Данный многогранник будет отображаться на f плоских многоугольников, расположенных будто бы в два слоя.

Если основание имеет n вершин, то сумма его плоских углов равна $(n - 2)\pi$. Других вершин $e - n$. Сумма плоских углов всех граней многогранника, кроме основания, равна $(n - 2)\pi + (e - n) \cdot 2\pi$. Следовательно,

$$\Sigma\alpha = (n - 2)\pi + (n - 2)\pi + (e - n)2\pi = 2\pi(e - 2).$$

Приравняв этот результат к найденному раньше, получим: $2\pi(e - 2) = 2\pi(k - f)$, откуда $e - k + f = 2$.

Доказанная теорема выполняется и для многих невыпуклых многогранников, которые можно деформировать описанным выше способом, не изменяя числовых значений e , f и k . Но, например, для многогранников, изображенных на рисунке 133, б, теорема Эйлера не выполняется.

С разными, иногда очень сложными, материальными моделями многогранников имеют дело каменщики, плотники, шлифовщики, строгальщики, гранильщики, минералоги, кристаллографы и другие специалисты. Например, столяр ежедневно делает десятки деталей в виде самых разнообразных многогранников. Экскаваторщики роют разные траншеи, котлованы и другие выемки также преимущественно в виде многогранников.

На рисунке 138 изображены природные формы кристаллов граната.

Известный чешский писатель Карел Чапек, ознакомившись с кристаллами и поняв их роль в жизни людей, пропел им большой гимн – словом и рисунком (рис. 139). «И в человеке

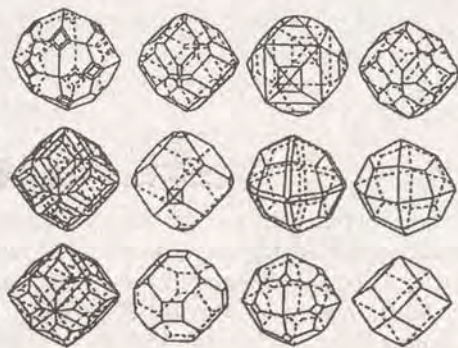


Рис. 138



Рис. 139

спрятана сила кристаллизации. Число и фантазия, закон и достаток – вот живые, творческие силы природы: не сидеть под землей деревом, а создавать кристаллы и идеи, вот что означает быть вместе с природой!»



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое многогранник? Назовите его элементы.
2. Как связаны понятия: геометрические фигуры, тела и многогранники? Покажите на диаграмме.
3. Какие многогранники называют выпуклыми, а какие – невыпуклыми?
4. Что такое площадь поверхности многогранника?
5. Сформулируйте теорему Эйлера о многогранниках.



Выполним вместе

1. Многогранник имеет 9 ребер. Докажите, что его гранью не может быть пятиугольник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. К пятиугольной грани многогранника прилегает не менее 5 смежных граней, образующих не менее 5 ребер. Следовательно, если хотя бы одна из граней многогранника – пятиугольник, то он имеет не менее 10 ребер.

2. Докажите, что когда все грани выпуклого многогранника – треугольники, то их число – четное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все грани выпуклого n -гранника – треугольники. Всех сторон у этих треугольников $3n$. Поскольку каждое ребро данного многогранника является общей стороной для двух треугольников, то многогранник

имеет $\frac{3n}{2}$ ребер. Число $\frac{3n}{2}$ должно быть целым.

Следовательно, число n – четное.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



656. Приведите примеры многогранников из окружающей среды. Какие из них выпуклые, а какие – невыпуклые?
657. Назовите многогранник, который имеет наименьшее количество граней. Сколько у него вершин? А ребер?
658. Одна из граней многогранника семиугольник. Какое наименьшее количество ребер и граней он может иметь?

659. Пирамида имеет 26 ребер. Сколько она имеет вершин? А граней?
660. В призме 36 ребер. Сколько она имеет граней и вершин?
661. Всегда ли объединение выпуклых фигур является фигурой выпуклой?
662. Может ли выпуклая пирамида иметь три боковые грани, перпендикулярные к плоскости основания? А если пирамида невыпуклая?
- А**
663. Укажите количество граней, ребер и вершин для многогранников, изображенных на рисунке 140, и убедитесь в справедливости теоремы Эйлера для каждого из них.
664. Нарисуйте невыпуклый многогранник, все грани которого выпуклые многоугольники.
665. Нарисуйте многогранник, имеющий 4 грани. Сколько ребер и вершин он имеет? Как называется такой многогранник?
666. Нарисуйте многогранник, имеющий 5 граней и 5 вершин. Сколько ребер он имеет?
667. Нарисуйте многогранник, имеющий 5 граней и 6 вершин. Сколько ребер он имеет?
668. Существует ли многогранник, отличный от тетраэдра, все грани которого треугольники? Сделайте рисунок.
669. Докажите, что произвольный выпуклый многогранник можно разбить на конечное количество треугольных пирамид.
670. Нарисуйте развертку правильного тетраэдра, длина ребра которого 2 см. Найдите площадь развертки.
671. Площадь поверхности правильного тетраэдра $36\sqrt{3}$ см². Найдите длину его ребра.
672. Если от куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отрезать тетраэдр $A_1 A B_1 D_1$, останется многогранник $ABCDD_1 B_1 C_1$. Сколько граней, ребер и вершин он имеет? Найдите площадь его наибольшей грани, если $AB = a$.
673. Площади трех граней параллелепипеда 2 м², 3 м² и 4 м². Найдите площадь его поверхности.

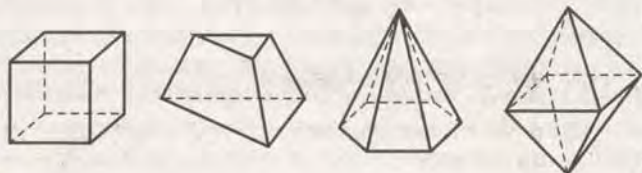


Рис. 140

674. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если длина одного из ребер a , а площади прилежащих к нему граней S_1 и S_2 .

Б

675. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если ребер: а) 12; б) 15? Выполните соответствующие рисунки.
676. Начертите многогранник, для которого не выполняется теорема Эйлера.
677. Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основание – выпуклый многоугольник.
678. Найдите площадь поверхности тетраэдра $ABCD$, если $AC = CB = BD = DA = DC = a$ и $\angle ACB = \varphi$. Вычислите, если $a = 1,2$ м, $\varphi = 50^\circ$.
679. Длина одного ребра тетраэдра a , а каждого из оставшихся b . Докажите, что $0 < a < b\sqrt{3}$.
680. Может ли проекция многогранника иметь вид, как на рисунке 141?



Рис. 141

В

681. Докажите, что когда все грани выпуклого n -гранника – пятиугольники, то он имеет $2,5n$ ребер.
682. Докажите, что у произвольного многогранника количество граней с нечетным количеством сторон – четное.
683. Докажите, что когда все грани многогранника – четырехугольники, то ребер он имеет в 2 раза больше, чем граней.
- 684*. Докажите, что только у тетраэдра все грани – треугольники и все многогранные углы – трехгранные.
- 685*. Докажите, что когда все грани многогранника – треугольники и все многогранные углы четырехгранные, то он имеет 8 граней.
- 686*. Докажите, что не существует многогранника с 7 ребрами.
- 687*. Чему равна сумма всех плоских углов выпуклого многогранника, имеющего n вершин?
- 688*. Докажите, что выпуклый многогранник имеет по крайней мере одну треугольную грань или один трехгранный угол.

Упражнения для повторения

689. Какие из фигур не являются телом: куб, тетраэдр, круг, сфера, трехгранный угол?

690. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$.
691. Точка M находится на расстоянии 8 см от всех сторон $\triangle ABC$. Найдите угол между плоскостями AMB и ABC , если стороны треугольника 13 см, 14 см, 15 см.



ПРИЗМЫ

Призмой называется многогранник, две грани которого – равные n -угольники, а остальные n граней – параллелограммы.

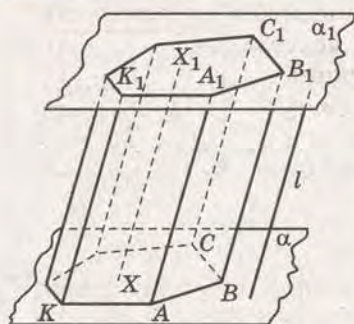


Рис. 142

Покажем, как можно построить такой многогранник. Пусть α и α_1 – две параллельные плоскости, l – прямая, их пересекающая, и $ABC...K$ – n -угольник в плоскости α (рис. 142). Проведем через каждую точку X этого n -угольника прямую, параллельную прямой l , и обозначим через X_1 точку пересечения ее с плоскостью α_1 . Все построенные так отрезки XX_1 заполняют некоторый многогранник. Этот многогранник – призма. Его

грани $ABC...K$ и $A_1 B_1 C_1 ... K_1$ – равные n -угольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные n граней: $ABB_1 A_1$, $BCC_1 B_1$, ... – параллелограммы.

Равные n -угольники $ABC...K$ и $A_1 B_1 C_1 ... K_1$ построенной призмы называют ее **основаниями**, параллелограммы $AA_1 B_1 B$, $BB_1 C_1 C$, ..., $KK_1 A_1 A$ – **боковыми гранями**, отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , ..., KK_1 – **боковыми ребрами** призмы. Поверхность такой n -угольной призмы состоит из двух равных n -угольников и n параллелограммов, боковая поверхность – из n параллелограммов.

Призма называется **прямой**, если ее боковые ребра перпендикулярны к основанию. Другие призмы – **наклонные**. Каждая боковая грань прямой призмы – прямоугольник.

Высота призмы – расстояние между плоскостями ее оснований. Высота прямой призмы равна длине ее бокового ребра.

Призма называется **правильной**, если она прямая и ее основания – правильные многоугольники. Все боковые грани правильной призмы – равные прямоугольники. На рисунке 143

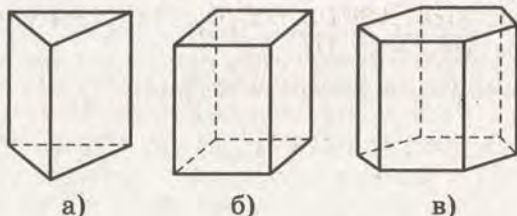


Рис. 143

изображены правильные треугольная, четырехугольная и шестиугольная призмы.

Если призма выпуклая, то любая плоскость, проходящая через боковое ребро и диагональ основания, рассекает ее на две другие призмы. Такая плоскость называется *диагональной плоскостью*, а сечение призмы этой плоскостью – *диагональным сечением*. Диагональное сечение любой призмы – *параллелограмм*, а прямой призмы – *прямоугольник*.

Форму призмы имеет обычный кирпич, железобетонный блок, брусок, доска, граненый карандаш и т. п. Можно ли считать, что изображенная на рисунке 144 фундаментная подушка имеет форму призмы? Да, но поставлена на боковую грань.



Рис. 144

Площадь боковой поверхности призмы называют суммой площадей ее боковых граней.

Теорема 20. *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту призмы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть высота данной прямой призмы равна h , а периметр основания $AB + BC + \dots + KA = P$ (рис. 145). Докажем, что площадь ее боковой поверхности $S_6 = Ph$.

Каждая боковая грань прямой призмы – прямоугольник. Его основание равно соответствующей стороне основания призмы, а высота – высоте призмы. Поэтому

$$\begin{aligned} S_6 &= AB \cdot h + BC \cdot h + \dots + KA \cdot h = \\ &= (AB + BC + \dots + KA) \cdot h = Ph. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Чтобы найти площадь боковой поверхности наклонной призмы, надо найти площадь каждой ее боковой грани и результаты сложить.

Для нахождения площади боковой поверхности наклонной призмы иногда удобно пользоваться такой теоремой.

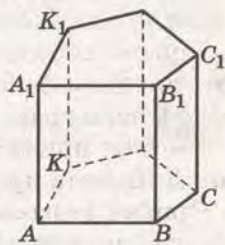


Рис. 145

Теорема 21. *Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.*

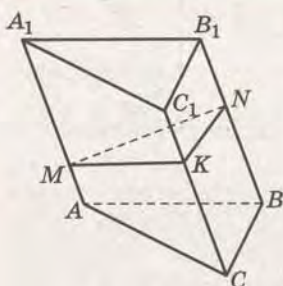


Рис. 146



Рис. 147

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть MNK – перпендикулярное сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 146), т. е. сечение, проведенное перпендикулярно к ее боковым ребрам. Тогда MN , NK , MK – высоты боковых граней. Поскольку все боковые ребра призмы равны, то

$$\begin{aligned} S_6 &= MN \cdot AA_1 + NK \cdot BB_1 + MK \cdot AA_1 = \\ &= MN \cdot AA_1 + NK \cdot AA_1 + MK \cdot AA_1 = \\ &= AA_1(MN + NK + MK) = AA_1 \cdot P_{MNK}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. Имеется в виду, что упоминавшееся в теореме «перпендикулярное сечение» существует. Для наклонных призм с малыми боковыми ребрами (рис. 147) формулировку теоремы следует уточнить. Как?

Площадь поверхности призмы равна сумме площади ее боковой поверхности и удвоенной площади основания:

$$S_{\Pi} = S_6 + 2S_0.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое призма? Назовите элементы призмы.
2. Какими бывают призмы?
3. Какие призмы называют прямыми? А правильными?
4. Что такое диагональ призмы? А диагональная плоскость; диагональное сечение призмы?
5. Чему равна площадь боковой поверхности прямой призмы? А наклонной?
6. Чему равна площадь поверхности произвольной призмы?



Выполним вместе

1. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна l и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите площадь боковой поверхности призмы. Вычислите, если $l = 28$ см, $\alpha = 53^\circ$.

РЕШЕНИЕ. Пусть призма $ABCA_1B_1C_1$ правильная, а диагональ B_1A ее боковой грани имеет длину l (рис. 148). Сторона основания BA – проекция этой диагонали на плоскость основания, поэтому $\angle B_1AB = \alpha$. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы $S = 3ah$, где a – сторона основания, h – высота призмы. Из прямоугольного $\triangle B_1AB$ находим: $a = AB = l \cos \alpha$, $h = B_1B = l \sin \alpha$. Следовательно,

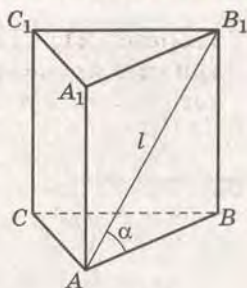


Рис. 148

$$S = 3 \cdot l \cos \alpha \cdot l \sin \alpha = 1,5 l^2 \sin 2\alpha.$$

$$S = 1,5 \cdot 28^2 \sin 106^\circ \approx 1130 \text{ (см}^2\text{)}.$$

ОТВЕТ. $S = 1,5 l^2 \sin 2\alpha \approx 11,3 \text{ (дм}^2\text{)}.$

2. Вершина B_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ равноудалена от вершин правильного $\triangle ABC$. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если сторона основания равна 10 см, а боковое ребро – 13 см.

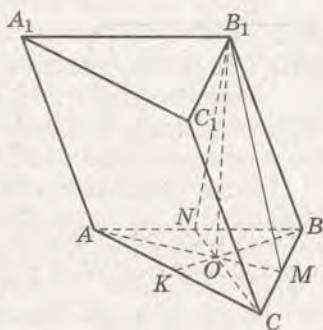


Рис. 149

РЕШЕНИЕ. Если точка B_1 равноудалена от вершин $\triangle ABC$, то она проектируется в точку O – центр окружности, описанной вокруг этого треугольника. Она является точкой пересечения его медиан AM , CN и BK (рис. 149).

Если $B_1O \perp (ABC)$ и $AM \perp CB$, то по теореме о трех перпендикулярах $B_1M \perp CB$. Тогда $S_{CC_1B_1B} = B_1M \cdot CB$. Поскольку $B_1M = B_1N$ и $AB = CB$, то $S_{AA_1B_1B} = S_{CC_1B_1B}$.

Из $\triangle B_1MB$ по теореме Пифагора найдем B_1M :

$$B_1M^2 = BB_1^2 - MB^2, B_1M^2 = 169 - 25 = 144, B_1M = 12.$$

$$\text{Тогда } S_{CC_1B_1B} = S_{AA_1B_1B} = 12 \cdot 10 = 120 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Прямая KB – проекция прямой B_1B на плоскость основания призмы. Из условия задачи $BK \perp AC$, поэтому по теореме о трех перпендикулярах $BB_1 \perp AC$. Поскольку $BB_1 \parallel CC_1$, то $CC_1 \perp AC$. Следовательно, AA_1C_1C – прямоугольник и $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot CC_1$, $S_{AA_1C_1C} = 10 \cdot 13 = 130 \text{ (см}^2\text{)}$. Тогда $S_6 = 2 \cdot 120 + 130 = 370 \text{ (см}^2\text{)}$.

ОТВЕТ. 370 см².



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



692. Приведите примеры тел из окружающей среды, которые имеют форму призмы.
693. Равны ли диагональные сечения правильной четырехугольной призмы? А шестиугольной?
694. Дана правильная треугольная призма. Чему равна мера двугранного угла при:
а) ребре основания; б) боковом ребре?
695. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 2 см?
696. В одной прямой n -угольной призме сторона основания равна a , а боковое ребро b ($a < b$). В другой прямой n -угольной призме сторона основания равна b , а боковое ребро a . Сравните площади боковых поверхностей этих призм; площади полных поверхностей.
697. Все ребра правильной шестиугольной призмы равны 3 см. Найдите площадь ее боковой поверхности.
698. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна 48 см^2 . Найдите боковое ребро призмы, если сторона основания равна 4 см.
699. Могут ли площади боковых граней правильной треугольной призмы быть равны 20 см^2 , 30 см^2 и 50 см^2 ?
700. Расстояние между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно 5 см, 7 см и 8 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее боковое ребро равно 10 см.

А

701. Существует ли призма, которая имеет ровно 100 ребер? Сколько вершин, ребер и граней имеет 100-угольная призма?
702. Сколько диагоналей и диагональных плоскостей имеет правильная десятиугольная призма? А n -угольная?
703. Найдите градусную меру двугранного угла при боковом ребре правильной пятиугольной призмы.
704. Боковое ребро призмы равно l и наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите высоту призмы.
705. Равны ли диагональные сечения правильной четырехугольной призмы? А правильной пятиугольной?
706. Высота правильной четырехугольной призмы равна h , а сторона основания a . Найдите площадь:
а) боковой поверхности; б) диагонального сечения призмы.



707. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ . Найдите площадь: а) диагонального сечения; б) боковой поверхности призмы.
708. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 см^2 , а высота — 10 см . Найдите площадь диагонального сечения.
709. Площадь поверхности правильной четырехугольной призмы равна 40 см^2 , а ее боковой поверхности — 32 см^2 . Найдите высоту призмы.
710. Три грани призмы — квадраты со стороной 2 см , а две другие — треугольники. Начертите эту призму и ее развертку.
711. В прямой треугольной призме все ребра равны. Площадь ее боковой поверхности равна 27 см^2 . Найдите площадь основания.
712. В правильной четырехугольной призме площадь диагонального сечения S . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
713. Основание призмы — ромб с углом 60° и стороной a , а все боковые грани — квадраты. Найдите длины диагоналей призмы и площади диагональных сечений.
714. Докажите, что если диагональные сечения призмы пересекаются, то их общий отрезок равен боковому ребру призмы и параллелен ему.
715. Найдите меру наибольшего двугранного угла при боковом ребре треугольной призмы, если стороны перпендикулярного сечения равны 7 см , 8 см и 13 см .
716. Расстояние между боковыми ребрами треугольной призмы равно 18 см , 20 см и 22 см , а боковая поверхность равновелика площади перпендикулярного сечения. Найдите боковое ребро призмы.
717. Основанием прямой призмы является трапеция $ABCD$, в которой $AD = 21 \text{ см}$, $BC = 11 \text{ см}$, $AB = CD = 13 \text{ см}$. Найдите площадь полной поверхности призмы и площадь сечения, проходящего через ребра AD и B_1C_1 , если периметр диагонального сечения равен 58 см .
718. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, все боковые грани которой квадраты, равна 12 см^2 . Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проведенной через ребро основания и середину противоположного бокового ребра (рис. 150).

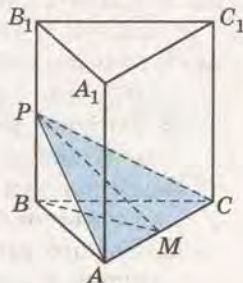


Рис. 150

719. Через середины двух сторон основания правильной треугольной призмы под углом α к основанию проведена плоскость, пересекающая два боковых ребра. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a . Вычислите, если $a = 15,7$ см, $\alpha = 30^\circ$.
720. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна S . Найдите площадь сечения, которое перпендикулярно к большей диагонали основания и делит эту диагональ пополам.
721. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две боковые грани по прямым, угол между которыми равен α . Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания призмы.
722. Диагонали боковых граней прямой треугольной призмы равны 10 см, $3\sqrt{29}$ см и $5\sqrt{13}$ см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если в ее основании лежит прямоугольный треугольник.
723. Докажите, что в правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ угол между диагоналями $A_1 C$ и $B_1 D$ равен 60° , если $B_1 D \perp BD_1$.
724. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и образует с боковой гранью угол α . Найдите: а) угол между диагональю призмы и плоскостью основания; б) площадь диагонального сечения; в) площадь боковой поверхности.
725. Через сторону нижнего основания и противоположную ей сторону верхнего основания правильной шестиугольной призмы проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если длина каждого ребра призмы равна a .
726. Основание прямой призмы – трапеция $ABCD$, $AB = BC = CD = 0,5DA$. Площадь боковой поверхности призмы равна S . Найдите площадь диагонального сечения.
727. $ABCA_1 B_1 C_1$ – правильная треугольная призма. Найдите косинус угла $A_1 B A$, если $\angle B A_1 C = \alpha$.
728. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ угол между прямыми $A_1 B$ и AC_1 равен α . Найдите площадь боковой поверхности призмы, если $AA_1 = b$.
729. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной a . Вершина B_1 проектируется в середину стороны AC . Найдите площадь боковой поверхности призмы, если:
а) боковые ребра образуют с плоскостью основания угол 60° ;
б) двугранные углы при ребрах AB и BC равны 60° .

730. Все ребра наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a . Боковое ребро BB_1 образует со сторонами AB и BC угол α . Найдите площадь поверхности призмы.
731. В треугольной призме каждая сторона основания равна a . Проекция одной из вершин основания – центр второго основания. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
- В**
732. В правильной треугольной призме площадь основания равна S_1 , а площадь сечения, проходящего через ребро нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, – S_2 . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
733. В правильной четырехугольной призме через середину отрезка, соединяющего центры оснований, и середины двух смежных сторон основания проведена плоскость. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если сторона основания призмы равна a , а боковое ребро – b .
734. В правильной треугольной призме со стороной основания $2a$ и боковым ребром a через сторону нижнего основания под углом α к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения. Рассмотрите все возможные случаи.
735. В правильной шестиугольной призме площадь меньшего диагонального сечения равна S . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
736. Назовите место центроида всех вершин правильной призмы.
737. Основание призмы – трапеция, параллельные стороны которой 8,8 дм и 5,6 дм, а непараллельные – по 3,4 дм. Одно из диагональных сечений призмы перпендикулярно к основанию и является ромбом с углом 45° . Найдите высоту и диаметр призмы.
738. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Вырежьте из плотной бумаги развертку треугольной призмы и сделайте из нее модель призмы.

Упражнения для повторения

739. Плоскость BC_1D разбивает куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ на два многогранника. Сколько ребер и граней в каждом из них?
740. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 2; -3)$ и $\vec{b} = (-5; 1; -1)$.
741. Найдите стороны трапеции, описанной около окружности радиуса R , если ее основания относятся как $m : n$.



ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ

Параллелепипедом называется призма, основание которой – параллелограмм.

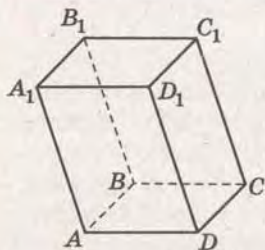


Рис. 151

Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы (рис. 151). Противоположные грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях, противоположные ребра равны и параллельны (почему?).

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к плоскости основания, называется **прямым параллелепипедом**. В нем все боковые грани – прямоугольники, а основания – параллелограммы. Если все грани параллелепипеда – прямоугольники, его называют **прямоугольным параллелепипедом**. Длины трех его ребер, выходящих из одной вершины, называются **измерениями** прямоугольного параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны, называется **кубом**. Правильная четырехугольная призма – отдельный вид прямоугольного параллелепипеда. Соотношение между разными видами параллелепипедов показано на схеме.



Рассмотрим важнейшие свойства диагоналей параллелепипеда.

Теорема 22. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

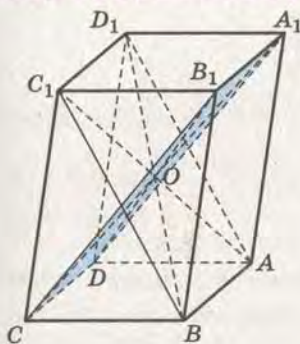


Рис. 152

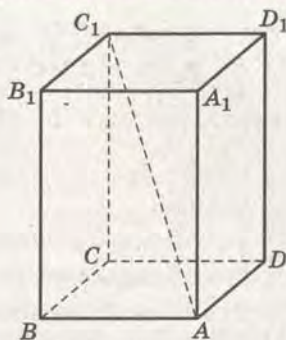


Рис. 153

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – произвольный параллелепипед (рис. 152). Его ребра AB , DC , $D_1 C_1$, $A_1 B_1$ равны и параллельны. Следовательно, четырехугольники $ABC_1 D_1$ и $DCB_1 A_1$ – параллелограммы, их диагонали пересекаются. Пусть диагонали AC_1 и BD_1 первого параллелограмма пересекаются в точке O , а диагонали DB_1 и CA_1 второго – в точке O_1 . Поскольку точкой пересечения каждая диагональ параллелограмма делится пополам, то O и O_1 – середины отрезков AC_1 и DB_1 . Эти отрезки – диагонали параллелограмма $ADC_1 B_1$, их середины совпадают. Таким образом, середина каждой диагонали AC_1 , BD_1 , CA_1 , DB_1 – одна и та же точка O . А это и надо было доказать.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений. Это следует из пространственной теоремы Пифагора. Если AC_1 – диагональ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, то AB , AD , AA_1 – ее проекции на три попарно перпендикулярные прямые (рис. 153). Следовательно: $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Под «диагональю» в одном случае понимают отрезок, а в другом – длину этого отрезка. Названия «высота», «боковое ребро», «сторона основания» также употребляются для обозначения двух разных понятий: отрезка и его длины. Вместо «длина диагонали равна d » пишут «диагональ равна d » или еще короче: «диагональ d ».

Форму прямоугольного параллелепипеда имеют кирпичи, бруски, контейнеры, ящики для овощей и фруктов, некоторые упаковки продуктов питания, лекарств и т. п. С непрямоугольными параллелепипедами часто приходится иметь дело минералам и кристаллографам.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте определение параллелепипеда. Назовите его элементы.
2. Какие бывают параллелепипеды? Покажите на диаграмме.
3. Какой параллелепипед называется прямым?
4. Какой параллелепипед называется прямоугольным?
5. Что такое измерения прямоугольного параллелепипеда?
6. Сформулируйте и докажите свойства диагоналей параллелепипеда.
7. Чему равен квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда?



Выполним вместе

1. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна $5\sqrt{10}$ см, а диагонали боковых граней — 13 см и 15 см.

РЕШЕНИЕ. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, у которого $DB_1 = 5\sqrt{10}$ см, $DC_1 = 13$ см, $DA_1 = 15$ см (рис. 154). Обозначим измерения параллелепипеда $AD = a$, $DC = b$, $DD_1 = c$. Тогда по теореме Пифагора $DC_1^2 = b^2 + c^2$, $DA_1^2 = a^2 + c^2$ и $DB_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 250, \\ b^2 + c^2 = 169, \\ a^2 + c^2 = 225. \end{cases}$$

Если вычесть из первого уравнения второе и третье, получим, что $a^2 = 81$ и $b^2 = 25$, тогда $c^2 = 144$.

Следовательно, $AD = 9$ см, $DC = 5$ см, $DD_1 = 12$ см.

Тогда $S_6 = P_0 \cdot h = 2(5 + 9) \cdot 12 = 336$ (см²). $S_{\Pi} = S_6 + 2S_0$.

Поскольку $S_0 = 5 \cdot 9 = 45$ (см²), то $S_{\Pi} = 336 + 2 \cdot 45 = 426$ (см²).

ОТВЕТ. $S_{\Pi} = 426$ см².

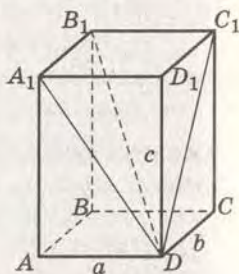


Рис. 154

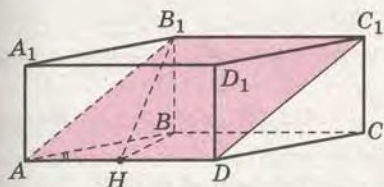


Рис. 155

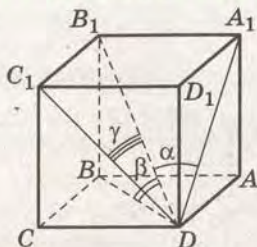


Рис. 156

2. Стороны AB и AD основания прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны 6 см и 8 см, а угол между ними 30° . Найдите площадь сечения параллелепипеда, которое проходит через AD и $B_1 C_1$, если высота параллелепипеда равна 4 см.

РЕШЕНИЕ. Сечение $AB_1 C_1 D$ – параллелограмм (рис. 155).

Пусть $B_1 H$ – высота этого параллелограмма. Тогда $S_{AB_1 C_1 D} = AD \cdot B_1 H$.

Если $B_1 H \perp AD$, то по теореме о трех перпендикулярах $BH \perp AD$. Если $\angle BAD = 30^\circ$, то $BH = 3$ см. Тогда по теореме Пифагора из $\triangle B_1 B H$ найдем $B_1 H$:

$$B_1 H^2 = B_1 B^2 + BH^2; B_1 H^2 = 16 + 9 = 25.$$

Тогда $B_1 H = 5$ см и $S_{AB_1 C_1 D} = 5 \cdot 8 = 40$ (см²).

ОТВЕТ. $S_{AB_1 C_1 D} = 40$ см².

3. Докажите, что если диагональ прямоугольного параллелепипеда с плоскостями его граней образует углы α , β , γ , то $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данные углы изображены на рисунке 156.

Поскольку параллелепипед прямоугольный, то ребро $B_1 A_1$ перпендикулярно к плоскости $DD_1 A_1$, а следовательно, и к диагонали DA_1 . Следовательно, $\angle B_1 A_1 D = 90^\circ$. Аналогично $\angle B_1 C_1 D = 90^\circ$.

Если $DB_1 = d$, то из прямоугольных треугольников $B_1 D A_1$, $B_1 D B$ и $B_1 D C_1$ найдем измерения параллелепипеда:

$$B_1 A_1 = d \sin \alpha, B_1 B = d \sin \beta, B_1 C_1 = d \sin \gamma.$$

Поэтому $d^2 \sin^2 \alpha + d^2 \sin^2 \beta + d^2 \sin^2 \gamma = d^2$, откуда

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



742. Приведите примеры тел, имеющих форму параллелепипеда, из окружающей среды.
743. Три грани параллелепипеда – прямоугольники. Следует ли из этого, что данный параллелепипед прямоугольный?
744. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, измерения которого 4 см, 5 см и 10 см.
745. В основании прямого параллелепипеда с высотой 5 см лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Найдите:
- площади диагональных сечений;
 - площадь боковой поверхности;
 - площадь полной поверхности.
746. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда, измерения которого 3 см, 4 см и 12 см.
747. Дан параллелепипед, каждая грань которого – ромб со стороной a и углом α . Найдите площадь его поверхности.
- А**
748. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед, а K, L, M – середины ребер $AB, A_1 B_1, B_1 C_1$ соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки K, L, M . Найдите площадь сечения, если $AA_1 = 3$ см, а $KM = 5$ см.
749. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – наклонный параллелепипед, M – середина его ребра $A_1 B_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки B, D, M .
750. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через середины ребер AB, CD, BB_1 . Определите вид сечения, если параллелепипед:
- прямоугольный;
 - прямой;
 - наклонный.
751. Измерения прямоугольного параллелепипеда 3, 4 и 5. Под каким углом наклонена диагональ параллелепипеда к плоскости наименьшей его грани?
752. Как связаны между собой измерения a, b, c прямоугольного параллелепипеда, если его диагональное сечение – квадрат?
753. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда, если площади трех его граней $42 \text{ см}^2, 72 \text{ см}^2$ и 84 см^2 .
754. Найдите площади диагональных сечений прямого параллелепипеда, если стороны его основания равны 2,3 м и 1,1 м, угол между ними 60° , а боковое ребро 1 м.

755. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, все ребра которого равны a , а угол в основании 60° .
756. Стороны основания прямого параллелепипеда 6 см и 8 см, а одна из диагоналей основания равна $2\sqrt{14}$ см. Найдите диагонали параллелепипеда, если его боковое ребро равно 5 см.
757. Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм со сторонами 3 см, 5 см и углом 60° . Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если площадь большего диагонального сечения равна 42 см^2 .
758. Площади диагональных сечений прямого параллелепипеда, в основании которого лежит ромб, равны 9 см^2 и 12 см^2 . Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
759. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью основания углы 30° и 45° . Какой угол с плоскостью основания образует диагональ параллелепипеда?

Б

760. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, если они образуют с плоскостью основания углы 30° и 45° , а стороны основания равны 7 см и 17 см.
761. Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна l и образует со стороной основания угол α , а с диагональю параллелепипеда — угол β . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
762. Найдите площадь основания $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если $DB_1 = 6 \text{ см}$, $DB = 5 \text{ см}$, $BC_1 = 4 \text{ см}$.
763. Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда $d^2 = 0,5(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$, где d_1, d_2, d_3 — диагонали трех граней, которые выходят из одной вершины.
764. Могут ли диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда иметь длины:
а) 30 см, 40 см и 70 см; б) 30 см, 40 см и 50 см?
765. Докажите, что сумма квадратов диагоналей любого параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.
766. Докажите, что сумма квадратов площадей диагональных сечений прямого параллелепипеда равна сумме квадратов площадей всех его граней.
767. Можно ли пересечь прямоугольный параллелепипед плоскостью так, чтобы в сечении образовался:
а) равносторонний треугольник;
б) прямоугольный треугольник?

768. ЗАДАЧА С НЕОЖИДАННЫМ ОТВЕТОМ.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная призма, в которой $AA_1 = 15$ см, $AB = 5$ см. M и M_1 – середины ее ребер AD и $C_1 B_1$. Найдите кратчайшее расстояние между точками M и M_1 по поверхности призмы (рис. 157).

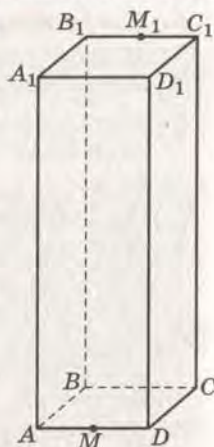


Рис. 157

769. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол α , а с плоскостью боковой грани – угол β . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда. Вычислите, если $d = 6$ м, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
770. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с боковыми гранями углы α и β . Какой угол эта диагональ образует с плоскостью основания?
771. Основанием прямого параллелепипеда является ромб. Одна из диагоналей параллелепипеда равна l и образует с плоскостью основания угол α , а с плоскостью боковой грани – угол φ . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда. Вычислите, если $l = 12$ м, $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 45^\circ$.
772. Найдите площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда, диагонали которого равны 14 см и 16 см, а стороны основания 6 см и 10 см.
773. Найдите площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если $DA_1 = 15$ см, $DC_1 = 13$ см, а вершина B_1 удалена от сторон AD и DC на $2\sqrt{61}$ см и $6\sqrt{13}$ см соответственно.
774. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено сечение $AB_1 C_1 D$. Площади четырехугольников $ABCD$ и $AB_1 C_1 D$ равны 12 см^2 и 20 см^2 . Найдите площадь:
а) грани $BB_1 C_1 C$;
б) четырехугольника $DA_1 B_1 C$, если $AD : DC = 2 : 1$.
775. Основанием параллелепипеда является квадрат со стороной 4 см. Одна из вершин основания равноудалена от вершин второго основания. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда, если его боковое ребро равно 3 см.
776. Основание параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – квадрат $ABCD$. Найдите BD_1 , если $AB = AA_1 = a$, $\angle A_1 AB = \angle A_1 AD$.
777. Боковое ребро AA_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $2\sqrt{17}$ см и образует со сторонами AB и AD равные острые

углы. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда, если его высота равна 2 см, а в основании лежит ромб, у которого $AC = 20$ см и $BD = 15$ см.

В

778. Через сторону основания прямого параллелепипеда проведена секущая плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если в основании лежит ромб со стороной $2a$ и углом 30° , а высота параллелепипеда равна a .
779. Диагональ B_1D прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ образует с боковым ребром угол 60° и отдалена от AA_1 и AC на 3 см и 2 см соответственно. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда, если $ABCD$ – ромб.
780. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами углы α, β, γ . Докажите, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- 781*. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с тремя его ребрами углы α, β, γ . Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.
- 782*. Каждая грань параллелепипеда – ромб со стороной a и углом 60° . Найдите длины диагоналей параллелепипеда.
- 783*. Даны параллелепипед и сфера с центром в точке пересечения его диагоналей. Найдите сумму квадратов расстояний от любой точки сферы до всех вершин параллелепипеда, если радиус сферы r , а сумма квадратов всех ребер параллелепипеда σ .
784. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Сделайте из картона или дерева модель наклонного параллелепипеда.



Упражнения для повторения

785. Вершина B_1 призмы $ABCA_1 B_1 C_1$, в основании которой лежит правильный $\triangle ABC$, проектируется в центр нижнего основания. Докажите, что $\angle B_1 BA = \angle B_1 BC$.
786. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна 9 см, а площадь поверхности 144 см².
787. Найдите точки, симметричные середине отрезка AB относительно координатных плоскостей, если:
- $A(1; 4; 2), B(3; 0; 4)$;
 - $A(0; 1; -1), B(2; 3; 1)$;
 - $A(-1; 4; -2), B(3; 0; -6)$.



ПИРАМИДЫ И УСЕЧЕННЫЕ ПИРАМИДЫ

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого – произвольный многоугольник, а другие грани – треугольники, имеющие общую вершину (рис. 158).

Эти треугольники, имеющие общую вершину, называют *боковыми гранями*, их общую вершину – *вершиной* пирамиды. Грань пирамиды, которая не является боковой, – *основание пирамиды*. В зависимости от числа сторон основания различают треугольные, четырехугольные, ..., n -угольные пирамиды. Треугольную пирамиду называют еще *тетраэдром*.

Каждое ребро пирамиды, не являющееся стороной основания, называют *боковым ребром*. Если пирамида выпуклая, то любая плоскость, проходящая через боковое ребро и диагональ основания, пересекает ее на две другие пирамиды. Такая плоскость называется *диагональной плоскостью*, а сечение пирамиды этой плоскостью – *диагональным сечением*. Каждое диагональное сечение пирамиды – треугольник. Треугольная пирамида диагональных сечений не имеет.

Высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из ее вершины на плоскость основания, или длина этого перпендикуляра.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а его центр совпадает с основанием высоты пирамиды. Все боковые ребра правильной пирамиды равны и все ребра при основании равны. Все боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники. Высоту боковой грани правильной пирамиды, проведенную из ее вершины, называют *апофемой пирамиды*. Неправильные пирамиды апофем не имеют. На рисунке 159 изображены правильные треугольная и четырехугольная пирамиды.

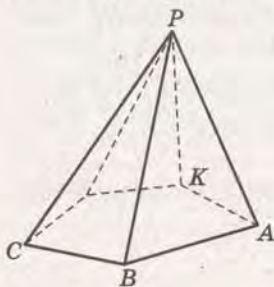


Рис. 158

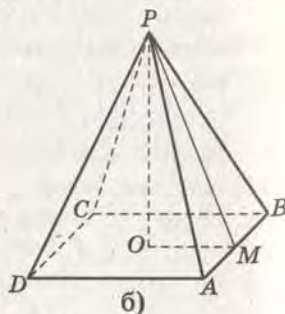
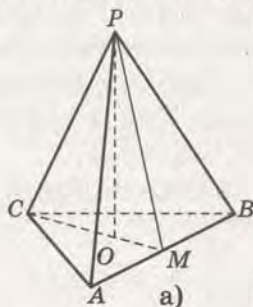


Рис. 159

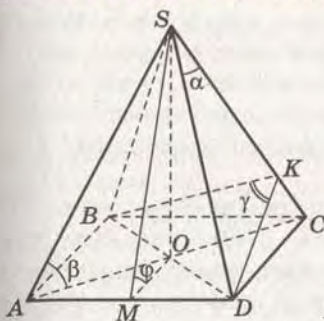


Рис. 160

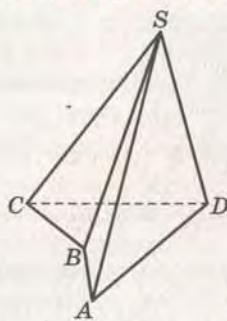


Рис. 161

Отрезки PO – их высоты, а PM – апофемы. Боковая поверхность пирамиды состоит из всех боковых граней.

В пирамиде желательно различать углы: плоский угол при вершине α , угол наклона бокового ребра к плоскости основания β , двугранный угол при боковом ребре γ , двугранный угол при ребре основания φ и т. п. (рис. 160). Обратите внимание: двугранный угол при боковом ребре может быть больше 180° (рис. 161). Двугранный угол при основании пирамиды также может быть тупым. Поэтому двугранный угол при основании может не быть равным углу, под которым боковая грань наклонена к плоскости основания.

Теорема 23. *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания на апофему пирамиды.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если сторона основания данной пирамиды a , а апофема l , то площадь одной ее боковой грани равна $\frac{1}{2}al$. Боковая поверхность S_6 рассматриваемой пирамиды состоит из n таких граней, ее площадь в n раз больше. Поэтому, если периметр основания пирамиды равен P , то

$$S_6 = \frac{1}{2}aln = \frac{1}{2}Pl.$$

Площадь поверхности пирамиды равна сумме площади ее боковой поверхности и площади основания:

$$S_{\pi} = S_6 + S_0.$$

Если каждый двугранный угол при основании пирамиды равен φ , а площадь ее основания S_0 , то площадь боковой поверхности:

$$S_6 = \frac{S_0}{\cos \varphi}.$$

Это следует из теоремы о площади ортогональной проекции.

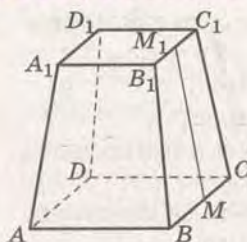


Рис. 162

Если произвольную n -угольную пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, эта плоскость отсечет от пирамиды многогранник, две грани которого подобные n -угольники, а остальные n граней – трапеции.

Такую часть пирамиды называют *усеченной пирамидой*. Параллельные грани усеченной пирамиды называют ее *основаниями*, а все другие – *боковыми гранями*.

Высота усеченной пирамиды – расстояние между плоскостями ее оснований.

Усеченную пирамиду называют *правильной*, если она является частью правильной пирамиды. На рисунке 162 изображена правильная четырехугольная усеченная пирамида $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Грани $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ – ее основания, отрезок MM_1 – апофема.

Теорема 24. *Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть периметры оснований и апофема данной правильной усеченной n -угольной пирамиды равны P_1 , P_2 и m . Каждая ее боковая грань – трапеция, стороны которой $\frac{P_1}{n}$ и $\frac{P_2}{n}$, а высота m . Площадь одной такой трапеции равна

$$\left(\frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n} \right) \cdot \frac{m}{2}.$$

Площадь боковой поверхности данной усеченной пирамиды

$$S_6 = n \cdot \left(\frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n} \right) \cdot \frac{m}{2} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot m.$$

Это и надо было доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Усеченная пирамида не является пирамидой, поскольку не соответствует определению пирамиды. Поэтому нельзя утверждать, что «усеченная пирамида – это такая пирамида, у которой...» или что «пирамиды бывают полные и усеченные».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте определение пирамиды. Назовите ее элементы.

2. Что такое диагональная плоскость пирамиды? А диагональное сечение?
3. Какие пирамиды называют правильными?
4. Что такое апофема правильной пирамиды?
5. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
6. Что такое усеченная пирамида? Назовите ее элементы.
7. Является ли усеченная пирамида пирамидой?
8. Чему равна площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды?



Выполним вместе

1. Основание пирамиды – трапеция. Постройте прямые, по которым пересекаются плоскости противоположных боковых граней пирамиды.

РЕШЕНИЕ. Пусть дана пирамида $PABCD$, у которой $AB \parallel CD$ (рис. 163). Плоскости ее боковых граней PAB и PCD пересекаются по прямой PK , параллельной AB . Если прямые AD и BC пересекаются в точке M , то плоскости граней PAD и PBC имеют общие точки P и M . Следовательно, они пересекаются по прямой PM . Поэтому строим:

- а) прямую PK , параллельную AB ;
 - б) прямую PM , где M – точка пересечения прямых AD и BC .
- Прямые PK и PM искомые.

2. Докажите, что когда все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами, то основание ее высоты – центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все боковые ребра пирамиды $PABC...K$ наклонены к плоскости основания под углом β (рис. 164), то прямоугольные треугольники POA , POB , ...,

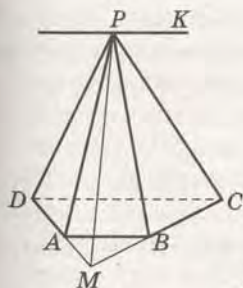


Рис. 163

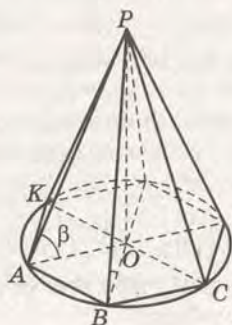


Рис. 164

POK равны (по катету PO и противолежащему углу). Тогда равны и отрезки $OA, OB, \dots, OK$. Следовательно, все вершины основания данной пирамиды лежат на одной окружности с центром в точке O .

3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α . Боковая грань пирамиды, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом β . Найдите высоту пирамиды.

РЕШЕНИЕ. Пусть $SABC$ – пирамида, у которой $AB = c$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 165).

Боковая грань ASB перпендикулярна к плоскости основания, SO – высота пирамиды.

Проведем $OM \perp AC$, $ON \perp BC$, точки M и N соединим с точкой S . По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$ и $SN \perp BC$. Следовательно, $\angle SMO$ и $\angle SNO$ – линейные углы двугранных углов при ребрах AC и BC : $\angle SMO = \angle SNO = \beta$.

Поскольку $\triangle SOM = \triangle SON$ (по катету и противолежащему углу), то $OM = ON$.

Рассмотрим $\triangle ABC$. Имеем: $AC = c \cos \alpha$, $BC = c \sin \alpha$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha.$$

Рассмотрим $\triangle AOC$ и $\triangle BOC$. Пусть $OM = ON = x$.

Поскольку $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$ и

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot OM = \frac{1}{2} cx \cos \alpha,$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot ON = \frac{1}{2} cx \sin \alpha,$$

$$\text{то } \frac{1}{2} cx \cos \alpha + \frac{1}{2} cx \sin \alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha,$$

$$\text{или } 2cx(\cos \alpha + \sin \alpha) = c^2 \sin 2\alpha,$$

$$\text{откуда } x = \frac{c \sin 2\alpha}{2(\cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

Тогда из $\triangle SOM$ найдем SO :

$$SO = OM \operatorname{tg} \beta, \text{ или } SO = \frac{c \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta}{2(\cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

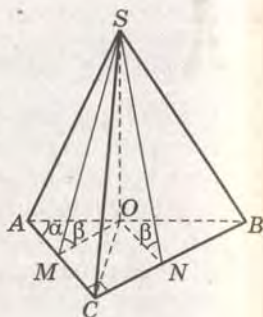


Рис. 165

Попробуйте решить эту задачу другим способом, например используя подобие треугольников.

ОТВЕТ. $\frac{c \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta}{2(\cos \alpha + \sin \alpha)}$.

4. Через середину высоты усеченной пирамиды параллельно основаниям проведено сечение. Найдите площадь сечения, если площади оснований S и Q .

РЕШЕНИЕ. Основания усеченной пирамиды и срединное сечение – подобные многоугольники. Обозначим их соответствующие стороны: $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $A_0B_0 = c$ (рис. 166). Тогда

$$c = \frac{a+b}{2} \text{ и } \frac{S}{Q} = \frac{a^2}{b^2},$$

откуда $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{Q}}$, $\frac{a+b}{b} = \frac{\sqrt{S} + \sqrt{Q}}{\sqrt{Q}}$.

Если площадь сечения равна X , то

$$\begin{aligned} \frac{X}{Q} &= \frac{c^2}{b^2}, \quad X = Q \frac{c^2}{b^2} = Q \left(\frac{a+b}{2b} \right)^2 = \\ &= Q \left(\frac{\sqrt{S} + \sqrt{Q}}{\sqrt{Q}} \right)^2 = \frac{1}{4} (\sqrt{S} + \sqrt{Q})^2. \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $0,25(\sqrt{S} + \sqrt{Q})^2$.

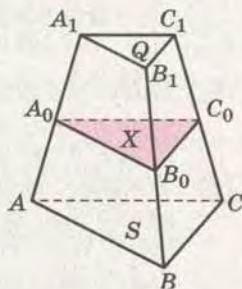


Рис. 166

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



788. Сколько граней, вершин и ребер имеет n -угольная пирамида? Существует ли пирамида, которая имеет 125 ребер?
789. Найдите апофему правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна 4 см, а сторона основания – 6 см.
790. Двугранный угол при ребре основания правильной четырехугольной пирамиды равен 60° , а апофема – 10 см. Найдите площадь основания.
791. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности пирамиды, если сторону основания увеличить в 2 раза, а апофему – в 3 раза?

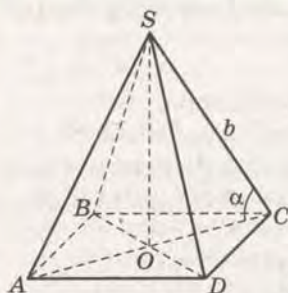


Рис. 167

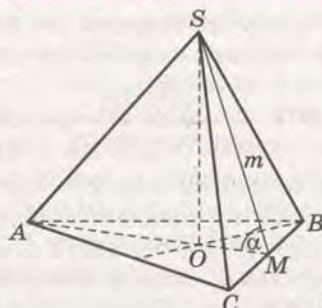


Рис. 168

792. Могут ли основаниями усеченной пирамиды быть прямоугольники, если стороны одного равны 3 см и 5 см, а второго – 4 см и 6 см?
793. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b и наклонено к плоскости основания под углом α (рис. 167). Найдите:
- а) высоту пирамиды;
 - б) радиус окружности, описанной вокруг основания;
 - в) диагональ основания;
 - г) площадь диагонального сечения;
 - д) сторону основания.
794. Апофема правильной треугольной пирамиды равна m и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите:
- а) высоту пирамиды;
 - б) радиус окружности, вписанной в основание;
 - в) радиус окружности, описанной вокруг основания;
 - г) сторону и площадь основания;
 - д) площадь боковой грани (рис. 168).
795. Ученик рассуждает: «Треугольная пирамида называется тетраэдром. Следовательно, правильная треугольная пирамида – это правильный тетраэдр». Прав ли он? Каждая ли правильная треугольная пирамида является правильным тетраэдром?

А

796. Известная пирамида Хеопса в Египте – правильная четырехугольная пирамида, высота которой равна 147 м, а площадь основания – 5,3 га. Найдите меру двугранного угла при ребре ее основания и угол наклона к плоскости основания ее бокового ребра.
797. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды в 2 раза меньше площади основания. Докажите, что противоположные боковые ребра пирамиды перпендикулярны.

798. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 12 см и 16 см. Каждое боковое ребро равно 26 см. Найдите высоту пирамиды.
799. Найдите площадь поверхности тетраэдра, вершины которого – точки $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$.
800. Высота четырехугольной пирамиды равна 4 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если в основании лежит: а) квадрат со стороной $8\sqrt{3}$ см; б) прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см; в) ромб с диагоналями 12 см и 16 см; г) параллелограмм площадью 24 см^2 со сторонами 3 см и 4 см.
801. Найдите площадь поверхности правильного тетраэдра, если: а) сторона основания равна a ; б) апофема равна l ; в) высота равна h .
802. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если:
- а) сторона основания равна a , а двугранный угол при ребре основания α ;
 - б) высота пирамиды равна h , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° ;
 - в) боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол β ;
 - г) расстояние от основания высоты до боковой грани равно d , а двугранный угол при ребре основания α ;
 - д) расстояние от основания высоты до бокового ребра равно l , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол β .
803. Найдите площадь поверхности правильной треугольной пирамиды, если:
- а) сторона основания равна a , а двугранный угол при ребре основания α ;
 - б) высота пирамиды равна h , а двугранный угол при ребре основания α ;
 - в) боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол β ;
 - г) расстояние от основания высоты до боковой грани равно d , а двугранный угол при ребре основания α ;
 - д) расстояние от основания высоты до бокового ребра равно l , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол β .
804. Основание пирамиды – ромб, острый угол которого 45° , а радиус вписанной окружности 3 см. Высота пирамиды проходит через центр этой окружности и равна 4 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

805. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a , боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. Вычислите, если $a = 7$ см, $\alpha = 45^\circ$.
806. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим углом α . Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β . Найдите высоту пирамиды.
807. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α . Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β . Найдите расстояние от основания высоты пирамиды до ее бокового ребра.
808. Докажите, что когда все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны, то основание ее высоты – центр окружности, вписанной в основание пирамиды.
809. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см. Каждый из двугранных углов при ребрах основания равен 60° . Найдите высоту пирамиды.
810. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 11 см, 24 см и 31 см. Высота пирамиды равна 2 см. Все двугранные углы при ребрах основания равны. Найдите эти углы.

Б

811. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, основание которой – квадрат со стороной a , а высота проходит через одну из вершин основания и равна h .
812. Основание пирамиды – ромб, сторона которого a , а острый угол 60° . Высота пирамиды равна a и проходит через вершину острого угла основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
813. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной a . Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а третья наклонена к ней под углом 30° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
814. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный $\triangle ABC$, у которого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если грани, содержащие стороны AB и AC , перпендикулярны к плоскости основания, а третья грань образует с ним угол β .
815. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине равны α , α , β . Боковое ребро, являющееся общей стороной равных углов, перпендикулярно к плоскости

основания и равно a . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

816. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной a . Одна боковая грань перпендикулярна к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом α . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
817. Основание пирамиды – правильный треугольник. Одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 60° . Как наклонено к плоскости основания наибольшее боковое ребро?
818. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с углом α и противоположным катетом a . Боковая грань, проходящая через этот катет, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом φ . Найдите высоту пирамиды.
819. В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится на расстоянии d от противоположной грани. Найдите площадь поверхности пирамиды, если двугранный угол при ребре основания равен α .
820. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α . Через диагональ основания, параллельно боковому ребру, проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если апофема пирамиды равна l .
821. Высота пирамиды равна 12 см, а площадь основания 288 см^2 . На каком расстоянии от основания надо провести сечение, параллельное основанию, чтобы его площадь была равна 50 см^2 ?
822. Сечение пирамиды, параллельное основанию, делит боковое ребро в отношении $2 : 3$, считая от вершины пирамиды. Найдите площадь основания, если она больше площади сечения на 63 см^2 .
823. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 12 см. Стороны оснований 20 см и 38 см. Найдите: а) длину ее бокового ребра; б) площадь сечения, которое проходит через диагонали оснований; в) площадь поверхности.
824. Стороны основания правильной усеченной пирамиды равны 8 см и 12 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите боковое ребро и апофему, если усеченная пирамида:
а) четырехугольная; б) треугольная; в) шестиугольная.
825. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды, диагональ которой

равна 10 см и образует с плоскостью основания угол 30° , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60° .

826. Основанием усеченной пирамиды является квадрат. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ним угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, если стороны оснований a и $2a$ (рис. 169).

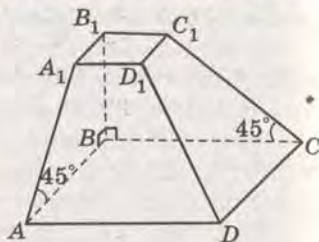


Рис. 169

В

827. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{2}$ см, а высота боковой грани, проведенная к боковому ребру, — $\sqrt{3}$ см. Найдите боковое ребро пирамиды.
828. Основанием пирамиды является квадрат. Двугранные углы при основании пропорциональны числам 1, 2, 4 и 2. Определите эти углы.
829. Найдите площадь основания правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна h , а двугранный угол при боковом ребре α .
830. Расстояние от основания высоты правильной треугольной пирамиды до середины бокового ребра равно стороне основания. Найдите косинус угла между смежными боковыми гранями.
831. Основание пирамиды — правильный треугольник. Найдите меры двугранных углов при ребрах основания, если высота пирамиды проходит через один из центров вневписанной окружности и равна ее радиусу.
832. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 10 см, а площадь поверхности 64 см^2 . Найдите сторону основания пирамиды.
833. Двугранные углы пирамиды при основании равны 60° . Найдите площадь сечения, которое параллельно основанию и делит высоту в отношении 1 : 3, считая от вершины, если площадь поверхности пирамиды равна 192 см^2 .
834. Найдите площадь поверхности пирамиды, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной l , а одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и также равно l .
835. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a . Двугранный угол при одном из ребер основания прямой, а двугранные углы при соседних с ним ребрах основания равны α и β . Найдите высоту пирамиды.

836. В основании пирамиды лежит трапеция $ABCD$, $AB = CD = K = 2$ см, $BC = 4$ см, $AD = 6$ см. Грани SAB и SCD перпендикулярны к плоскости основания, а двугранный угол при ребре AD равен 30° . Найдите высоту пирамиды и двугранный угол при ребре BC .
837. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a , если плоскость, проведенная через сторону основания перпендикулярно к противоположной боковой грани, делит эту грань на две равновеликие части.
838. Дана правильная пирамида, у которой: α – угол наклона боковой грани к плоскости основания, β – угол наклона бокового ребра к плоскости основания, γ – плоский угол при вершине пирамиды, ϕ – двугранный угол при боковом ребре. Зная один из этих углов, найдите другие, если пирамида: а) 4-угольная; б) 3-угольная; в) 6-угольная.
839. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны a . На сторонах BC и CD взяты точки M и N , а на поверхности пирамиды точка P так, что $PAMN$ – правильная треугольная пирамида с вершиной P . Найдите SP .
840. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, если сторона основания равна a , а угол между гранями SAB и SEF – α .
841. Расстояния от основания высоты правильной четырехугольной пирамиды до бокового ребра и до боковой грани соответственно равны m и n . Найдите двугранный угол при ребре основания пирамиды.
842. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания равна m , двугранный угол при ребре этого основания 60° , а площадь поверхности Q . Найдите сторону верхнего основания.
843. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна $18\sqrt{3}$ см², а площадь поверхности $27\sqrt{3}$ см². Высоту пирамиды разделили на три равные части и через точки деления провели сечения, параллельные основанию. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, ограниченной этими сечениями.
844. Плоскости сечений, параллельных основаниям, делят высоту усеченной пирамиды на три равные части. Найдите отношение площадей этих сечений, если площади оснований относятся как $1 : 4$.
845. Стороны верхнего и нижнего оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны $2a$ и $3a$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол α . Найдите площадь сечения усеченной пирамиды плоскостью,

проходящей через центр нижнего основания и среднюю линию боковой грани.

846. Высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот основания. Докажите, что суммы квадратов скрещивающихся ребер пирамиды равны между собой.
847. Докажите, что в треугольной пирамиде с прямым трехгранным углом при вершине квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей боковых граней.
- 848*. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна расположена внутри другой. Может ли сумма ребер внутренней пирамиды быть больше суммы ребер внешней?
- 849*. Докажите, что когда в треугольной пирамиде все грани имеют равные площади, то все они равны.
- 850*. Пусть AB и KP – две стороны, принадлежащие разным основаниям правильной усеченной пирамиды. Докажите, что проекции AB и KP на прямую, проходящую через их середины, равны между собой.



Упражнения для повторения

851. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и наклонена к плоскостям двух его граней под углами α и β . Найдите длины ребер параллелепипеда.
852. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через две противоположные стороны верхнего и нижнего оснований, если сторона основания равна 3 см, а боковое ребро 13 см.
853. Точка пространства P равноудалена от сторон прямоугольной трапеции с основаниями 10 см и 15 см. Найдите эти расстояния, если от плоскости трапеции точка P удалена на 8 см.



ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники, а все вершины одинаково удалены от некоторой точки.

Эта точка называется *центром* правильного многогранника.

Например, куб – правильный многогранник, поскольку все его грани – равные квадраты, а все вершины одинаково удалены от точки пересечения диагоналей куба.

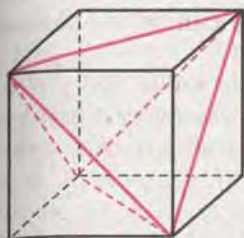


Рис. 170

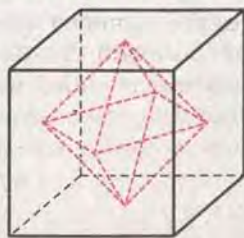


Рис. 171

Если соединим отрезками концы двух скрещивающихся диагоналей противоположных граней куба, получим каркас *правильного тетраэдра* (рис. 170). Каждая его грань – равно-сторонний треугольник, а каждая вершина одинаково удалена от центра куба. Соединив отрезками центры смежных граней куба, получим каркас *правильного октаэдра* (рис. 171). Каждая его грань – равносторонний треугольник, а все вершины одинаково удалены от центра данного куба.

Существует всего пять видов правильных многогранников. Кроме трех названных, еще *правильный додекаэдр* и *правильный икосаэдр* (рис. 172).

Куб называют еще *правильным гексаэдром*. Названия тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр в переводе с греческого значат: четырехгранник, шестигранник, восьмигранник, двенадцатигранник и двадцатигранник.

Форму куба имеют кристаллы кухонной соли и некоторые алмазы. Другие алмазы кристаллизуются в форме правильных октаэдров. Кристаллы пирита (железного колчедана) имеют форму правильного додекаэдра. Она настолько характерна для пирита, что кристаллографы додекаэдры чаще называют пиритоэдрами.

Свойства правильных (и производных от них) многогранников используют также архитекторы и строители, сооружающие сетчатые купола, специалисты, изучающие структуры веществ, и др.

Если центр O правильного n -гранника соединить отрезками со всеми вершинами, его можно разбить на n правильных пирамид, основаниями которых являются грани данного многогранника, а общей вершиной – точка O (рис. 173). Эти пира-



Рис. 172

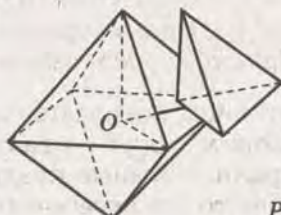


Рис. 173

миды в каждом правильном многограннике равны, так как равны все их основания и все боковые ребра. У равных правильных пирамид равны высоты и двугранные углы при основаниях. Поэтому в любом правильном многограннике каждая грань одинаково удалена от центра и все двугранные углы равны.

π Центр O каждого правильного многогранника, кроме тетраэдра, является центром его симметрии. Правильные многогранники имеют и другие элементы симметрии.

Плоскости симметрии, оси и центр симметрии, а также оси вращения разных порядков называют *элементами симметрии*. Перечислим элементы симметрии куба: 1 центр симметрии, 9 плоскостей симметрии, 6 осей симметрии второго порядка, 3 оси симметрии четвертого порядка, 4 оси третьего порядка, 4 оси зеркальной симметрии шестого порядка.

Такие же элементы симметрии имеет и правильный октаэдр. Ведь вершины правильного октаэдра расположены в центрах граней некоторого куба (эти многогранники взаимны). И при каждом самосовмещении одного из этих многогранников самосовмещается и другой.

Аналогично центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра и наоборот. Поэтому каждый из них имеет те же элементы симметрии, что и другой (1 центр симметрии, 15 плоскостей симметрии, 15 осей симметрии, 6 осей симметрии пятого порядка и 10 осей симметрии третьего порядка).

Если ко всем преобразованиям симметрии данной фигуры присоединить тождественное преобразование, получим *группу симметрии данной фигуры*. Например, группа симметрии куба (и правильного октаэдра) содержит 28 элементов.

Много элементов симметрии имеют и *полуправильные многогранники*, каждый из которых ограничен правильными, но не одноименными многоугольниками. Примеры таких тел нетрудно получить, если при каждой вершине правильного многогранника отрезать соответствующих размеров правильные пирамиды (рис. 174).



Рис. 174

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие многогранники называются правильными?
2. Назовите правильные многогранники.
3. Что такое центр правильного многогранника?
4. Сформулируйте наиболее важные свойства правильных многогранников.
5. Какие многогранники называют полуправильными?



Выполним вместе

1. Сколько граней может иметь правильный многогранник с пятиугольными гранями? Сколько он имеет вершин и ребер?

РЕШЕНИЕ. Если такой многогранник имеет n граней, то ребер он имеет $\frac{5n}{2}$, поскольку каждая грань имеет 5 сторон и каждое ребро является стороной для двух граней. В одной вершине такого многогранника сходится по 3 грани, поэтому вершин у него $\frac{5n}{3}$. По теореме Эйлера $n + \frac{5n}{3} - \frac{5n}{2} = 2$, откуда $n = 12$. Следовательно, пятиугольные грани из правильных многогранников имеет только 12-гранник. Это правильный додекаэдр. Вершин у него $5n : 3 = 20$, а ребер $5n : 2 = 30$.

ОТВЕТ. 12, 20, 30.

2. Покажите, что куб имеет 4 оси зеркальной симметрии шестого порядка.

РЕШЕНИЕ. Сечением куба плоскостью α , которая проходит через середину O диагонали AC_1 и перпендикулярна к ней, является правильный шестиугольник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ (рис. 175). Мысленно повернем данный куб вокруг прямой AC_1 на 60° . При этом точка M_1 перейдет в M_2 , M_2 — в M_3 , ..., M_6 — в M_1 , а данный куб F — в F_1 . Кубы F и F_1 симметричны относительно плоскости α . Следовательно, композиция поворота на 60° вокруг прямой AC_1 и симметрии относительно плоскости α

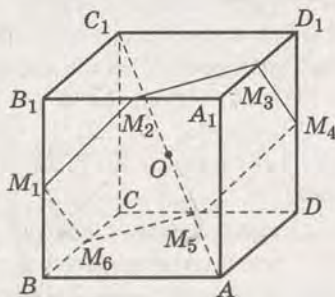


Рис. 175



отображает данный куб F на себя. Поскольку $360^\circ : 60^\circ = 6$, то прямая AC_1 – ось зеркальной симметрии шестого порядка. Всего диагоналей у куба четыре. Следовательно, куб имеет 4 оси зеркальной симметрии шестого порядка.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



854. Ученик рассуждает: «Каждая призма – многогранник, следовательно, каждая правильная призма – правильный многогранник». Прав ли он?
855. Является ли правильная пирамида правильным многогранником?
856. Существует ли пирамида, являющаяся правильным многогранником? А призма?
857. Будет ли правильным многогранник, который является объединением двух правильных тетраэдров, имеющих общее основание?
858. Чему равен плоский угол при вершине правильного икосаэдра? А гексаэдра?
859. Площадь грани правильного додекаэдра равна 10 см^2 . Чему равна его площадь поверхности?
860. Площадь поверхности правильного гексаэдра равна 54 см^2 . Чему равно его ребро?
861. Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча?

А

862. Из каких двух четырехугольных пирамид можно сложить правильный октаэдр? Как относятся высота и сторона основания такой пирамиды?
863. Является ли правильным многогранник, вершины которого – центры всех граней правильного:
а) тетраэдра; б) октаэдра?
864. Является ли правильным многогранник, вершины которого – середины всех ребер:
а) куба; б) правильного тетраэдра;
в) правильного октаэдра?
865. Из одной вершины куба проведены три диагонали боковых граней и их концы соединены отрезками. Будет ли образованная пирамида правильным многогранником?
866. Найдите сумму плоских углов при вершине каждого правильного многогранника.

867. От каждой вершины тетраэдра с ребром 4 см отсекают тетраэдр с ребром 2 см. Какой многогранник останется? Найдите сумму всех его ребер.
868. Под каким углом из центра куба видно его ребро? А из центра правильного октаэдра?
869. Найдите длину ребра правильного октаэдра, если его вершина удалена от центра на 1 дм.
870. Ребро правильного октаэдра равно 4 см. Найдите площадь сечения этого октаэдра его плоскостью симметрии.
871. Найдите площадь поверхности правильного икосаэдра, если его ребро равно a .
872. Найдите ребро правильного октаэдра, если площадь его поверхности равна S .
873. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного икосаэдра, если его ребро увеличить в 3 раза?

Б

874. Найдите меру двугранного угла при ребре правильного:
а) тетраэдра; б) октаэдра.
875. Изобразите на рисунке все оси симметрии правильного октаэдра.
876. Покажите, что правильный тетраэдр имеет: 6 плоскостей симметрии; 3 оси симметрии; 4 оси симметрии третьего порядка.
877. Докажите, что центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба.
878. Докажите, что можно выбрать 4 вершины куба так, что они будут вершинами правильного тетраэдра. Сколькими способами это можно сделать?
879. Ребро куба равно a . Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются центры граней куба.
880. Ребро правильного тетраэдра равно a . Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются центры граней данного тетраэдра.
881. Ребро правильного октаэдра равно a . Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются центры граней данного октаэдра.
882. Найдите площадь поверхности правильного додекаэдра, ребро которого равно m .
883. Найдите меру двугранного угла при ребре правильного:
а) додекаэдра; б) икосаэдра.
884. Докажите, что в правильном октаэдре противоположные:
а) ребра параллельны;
б) грани лежат в параллельных плоскостях.



885. Найдите расстояние между противоположными вершинами правильного октаэдра, ребро которого равно a .

В

886. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между параллельными опорными плоскостями правильного октаэдра, если его ребро равно a .

887. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что сечением тетраэдров $AB_1 CD_1$ и $C_1 BA_1 D$ является правильный октаэдр.

888. Докажите, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n -угольники, когда $n \geq 6$.

889*. Два правильных тетраэдра $ABCD$ и $MNPQ$ расположены так, что плоскости BCD и NPQ совпадают, вершина M лежит на высоте AO первого тетраэдра, а плоскость MNP проходит через центр грани ABC и середину ребра BD . Найдите отношение ребер тетраэдров.

890*. Докажите, что существует только пять видов правильных многогранников.

891*. Сколько элементов имеет группа симметрии правильного тетраэдра?

892*. Сколько элементов имеет группа симметрии полуправильного многогранника, изображенного на рисунке 174?

893*. Сечение правильного икосаэдра – правильный десятиугольник. Найдите его площадь, если ребро данного икосаэдра равно a .

894. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Вырежьте из плотной бумаги развертки правильного октаэдра, правильного додекаэдра, правильного икосаэдра и склейте из них многогранники.



Упражнения для повторения

895. Высота правильной треугольной пирамиды в 2 раза больше стороны основания. Найдите двугранный угол при боковом ребре.

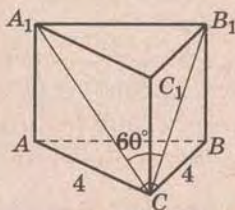
896. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Найдите угол между апофемой и плоскостью соседней боковой грани.

897. Три отрезка, не принадлежащих одной плоскости, имеют общую точку и делятся ею пополам. Докажите, что концы этих отрезков являются вершинами параллелепипеда.

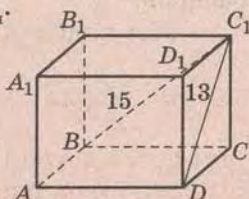
ЗАДАЧИ ПО ГОТОВЫМ РИСУНКАМ

А

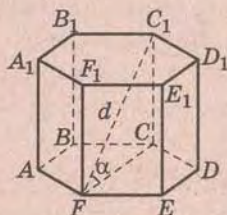
$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $\angle ACB = 90^\circ$; $AC = BC = 4$.
Найдите S_{π} .



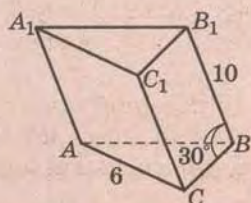
$ABCA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $S_{DD_1C_1C} : S_{BB_1C_1C} = 5 : 9$, $BC_1 = 15$, $DC_1 = 13$.
Найдите S_{π} .



$ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная призма, $C_1F = d$.
Найдите S_{π} .

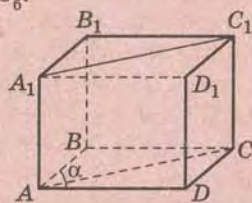


$\triangle ABC$ – правильный, $\angle B_1BC = \angle B_1BA = 30^\circ$.
Найдите S_6 .

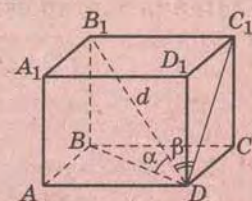


Б

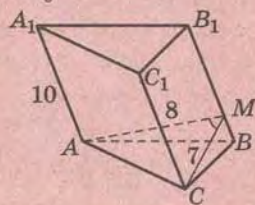
$ABCA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – ромб, $S_{AA_1C_1C} = S$.
Найдите S_6 .



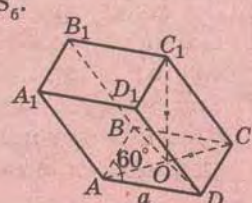
$ABCA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед.
Найдите S_6 .



$CM \perp BB_1$, $AM \perp BB_1$, $\angle AMC = 120^\circ$, $CM = 7$, $AM = 8$.
Найдите S_6 .

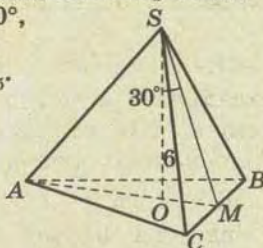


$ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 60^\circ$, $C_1O \perp (ABC)$, $C_1O = CO$.
Найдите S_6 .

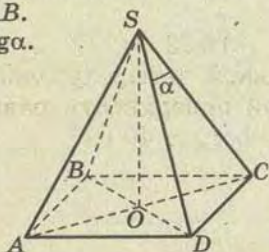


A

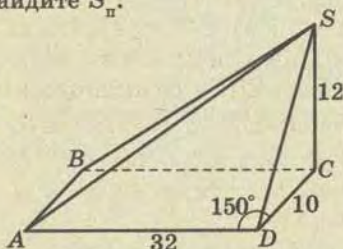
$SABC$ – правильная пирамида,
 $\angle OSM = 30^\circ$,
 $SO = 6$.
 Найдите S_6 .



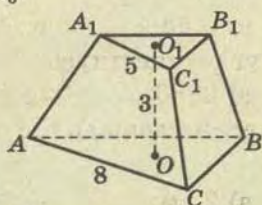
$SABCD$ – правильная пирамида,
 $SO = AB$.
 Найдите $\text{tg} \alpha$.



$ABCD$ – параллелограмм,
 $SC \perp (ABC)$.
 Найдите S_{π} .

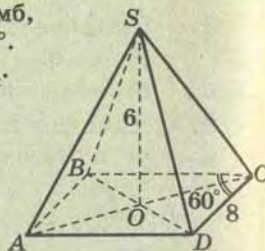


$ABCA_1B_1C_1$ – правильная усеченная пирамида, $AC = 8$, $A_1C_1 = 5$, $OO_1 = 3$, OO_1 – высота.
 Найдите S_6 .

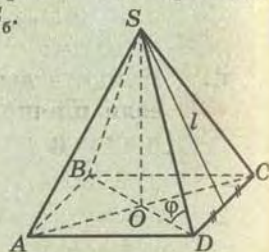


Б

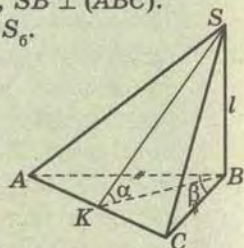
$ABCD$ – ромб,
 $\angle BCD = 60^\circ$.
 Найдите S_{π} .



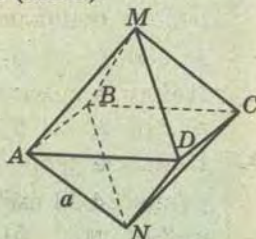
$SABCD$ – правильная пирамида.
 Найдите S_6 .



$AB = BC$, $\angle ABC = \beta$, $\angle SKB = \alpha$,
 $BK \perp AC$, $SB \perp (ABC)$.
 Найдите S_6 .



$MABCDN$ – правильный октаэдр.
 Найдите: а) MN ; б) расстояние от A до (MDC) .



ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите площадь поверхности куба, если его диагональ равна d .
а) d^2 ; б) $2d^2$; в) $3d^2$; г) $6d^2$.
2. Найдите площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 6 см и образует с плоскостью основания угол 45° .
а) $3\sqrt{2}$ см²; б) 18 см²; в) $9\sqrt{2}$ см²; г) 36 см².
3. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите высоту пирамиды.
а) 10 см; б) 5 см; в) $5\sqrt{2}$ см; г) $5\sqrt{3}$ см.
4. Найдите высоту правильной четырехугольной призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 32 см², а площадь полной поверхности – 40 см².
а) $2\sqrt{2}$ см; б) 4 см; в) $4\sqrt{2}$ см; г) 8 см.
5. Стороны основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь диагонального сечения.
а) 10 см²; б) 20 см²; в) 5 см²; г) $10\sqrt{2}$ см².
6. Комната имеет размеры 8 м, 7 м и 3 м. Найдите площадь стен, которые необходимо покрасить, если площадь окон и дверей составляет 20 % от площади стен.
а) 90 м²; б) 108 м²; в) 72 м²; г) 54 м².
7. Найдите меру плоского угла при вершине правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше диагонали основания.
а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .
8. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами a и b . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если двугранные углы при ребрах основания равны 60° .
а) $\sqrt{3}ab$; б) ab ; в) $0,5ab$; г) $2ab$.
9. Найдите сумму плоских углов шестиугольной призмы.
а) 2160° ; б) 1800° ; в) 2880° ; г) 3600° .
10. Найдите ребро октаэдра, если площадь его поверхности равна $24\sqrt{3}$ см².
а) $2\sqrt{2}$ см; б) $2\sqrt{3}$ см; в) 2 см; г) $2\sqrt{6}$ см.



ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ



- 1°. Точка A двугранного угла удалена от его ребра на 10 см, а от граней на 5 см. Найдите меру двугранного угла.
- 2°. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно a . Найдите площадь поверхности призмы.
- 3°. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна a , а диагональное сечение – прямоугольный треугольник.
- 4°. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 8 см. Одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания, а две другие образуют с ней углы по 60° . Найдите площадь поверхности пирамиды.
- 5°. Через сторону нижнего основания и середину противоположного бокового ребра правильной треугольной призмы проведено сечение под углом 45° к плоскости основания. Найдите площадь поверхности призмы, если площадь сечения $4\sqrt{3}$ см².
- 6°. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Найдите S_6 , если двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, а высота пирамиды $\sqrt{3}$ см.
- 7°. Найдите расстояние между центрами двух соседних граней правильного октаэдра, если его ребро равно l .
- 8°. Основание прямого параллелепипеда – ромб с острым углом 30° и стороной 4 см. Высота параллелепипеда равна 2 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через ребро основания и образует с плоскостью основания угол 60° .
- 9°. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны $8\sqrt{3}$ см и $6\sqrt{3}$ см. Через боковое ребро и середину противоположной стороны нижнего основания проведена плоскость. Найдите площадь поверхности усеченной пирамиды, если площадь сечения $10,5\sqrt{3}$ см².
- 10°. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a , а угол между смежными боковыми гранями α . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 11°. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$). Вершина B_1 проектируется в середину ребра BC . Найдите S_6 призмы, если боковое ребро равно l и образует с плоскостью основания угол α , а двугранный угол при ребре BB_1 равен β .

ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 2

1. Элементами многогранника являются, кроме других, двугранные и многогранные углы.
2. *Двугранный угол* – фигура, образованная двумя полуплоскостями, с общей прямой, их ограничивающей. Эта общая прямая – *ребро* двугранного угла, полуплоскости – его *грани*. *Линейным углом* двугранного угла называют угол, по которому данный двугранный угол пересекает плоскость, перпендикулярную к его ребру. Двугранные углы бывают острые, прямые, тупые, развернутые, больше развернутых. Последние двугранные углы невыпуклые.
3. *Трехгранный угол* – это фигура, состоящая из трех плоских углов, каждые два из которых имеют общую сторону и не принадлежат одной плоскости. Эти три плоских угла называют *гранями*, их общие стороны – *ребрами*, а общую вершину – *вершиной* данного трехгранного угла. Трехгранные углы бывают выпуклые и невыпуклые (рис. 124, а). Каждый угол выпуклого трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов. Сумма всех плоских углов выпуклого трехгранного угла меньше 360° . Сумма всех трех двугранных углов трехгранного угла больше 180° и меньше 540° .
4. Если один из двугранных углов выпуклого трехгранного угла прямой, то косинус противолежащего ему плоского угла равен произведению косинусов двух других его плоских углов.
5. *Многогранный угол* – фигура, описанная на с. 119. Каждый многогранный угол имеет *грани* (плоские углы), *ребра* (стороны этих углов) и *вершину* – общую вершину всех этих плоских углов. В зависимости от количества граней (или ребер) различают трехгранные, четырехгранные, ..., n -гранные многогранные углы. Многогранные углы бывают выпуклые и невыпуклые. Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .
6. Каждый из таких двугранных (трехгранных или многогранных) углов – определенная поверхность, которая делит все пространство на две пространственные области. Объединение такой поверхности и одной из пространственных областей называют также: двугранным (трехгранным или многогранным) углом.

7. Двугранные, трехгранные и многогранные углы – это отдельные виды *телесных углов*. Это – геометрические фигуры (множества точек). Их не следует путать с углами и угловыми мерами. Ни один двугранный, трехгранный или многогранный угол не является углом, так как не удовлетворяет определению угла.
8. Телесные углы измеряют в *стерадианах*. Прямой двугранный угол имеет π стерадиан, а прямой трехгранный – в 2 раза меньше.
9. *Многогранником* называют геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного количества плоских многоугольников. Важнейшие элементы многогранника – *грани, ребра, вершины*. Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Объединение всех граней многогранника – его поверхность. Самые простые и важнейшие виды многогранников – призмы, пирамиды, усеченные пирамиды, правильные многогранники.
10. *Призмой* называют многогранник, у которого две грани – равные n -угольники, а остальные n граней – параллелограммы. Упомянутые равные n -угольники – *основания* призмы, все другие n ее граней – *боковые грани*. Все боковые грани призмы – параллелограммы, их стороны, не являющиеся сторонами оснований, – *боковые ребра* призмы. Все боковые ребра призмы попарно параллельны. Если они перпендикулярны к основаниям, такая призма *прямая*. Все боковые грани прямой призмы – прямоугольники. В зависимости от числа n различают треугольные, четырехугольные, ..., n -угольные призмы. Призма называется *правильной*, если она прямая и ее основания – правильные многоугольники.
11. *Параллелепипедом* называют призму, в основании которой – параллелограмм. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы. Противоположные грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях. Все четыре диагонали каждого параллелепипеда пересекаются в одной точке – центре параллелепипеда.
12. Если боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны к плоскостям оснований, его называют *прямым параллелепипедом*. В прямом параллелепипеде 4 грани – прямоугольники. Если все 6 граней параллелепипеда прямоугольники, его называют *прямоугольным параллелепипедом*. *Правильная четырехугольная призма* – отдельный вид прямоугольного параллелепипеда. Квадрат



диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений. Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

13. *Пирамидой* называют многогранник, одна грань которого – произвольный многоугольник, а все другие грани – треугольники, имеющие общую вершину. Элементы пирамиды – основание, боковые грани, ребра основания, боковые ребра, вершина. Высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из ее вершины на плоскость основания, или длина такого перпендикуляра.
14. Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а его центр совпадает с основанием высоты. Все боковые грани правильной пирамиды – равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, – *апофема*. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания и апофемы.
15. Секущая плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на два многогранника: меньшую пирамиду и *усеченную пирамиду*. Усеченная пирамида имеет два основания, которые лежат в параллельных плоскостях. Все другие грани усеченной пирамиды – трапеции.
16. Многогранник называется *правильным*, если все его грани – равные правильные многоугольники, а все вершины одинаково удалены от некоторой точки. Существует всего 5 видов правильных многогранников: правильные тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Тела вращения

Главные темы раздела:

- Тела и поверхности вращения.
- Цилиндр.
- Конус и усеченный конус.
- Шар и сфера.
- Комбинации геометрических тел.



РАЗДЕЛ 3

Вращение плоской фигуры вокруг оси заключается в одновременном описывании всеми ее точками окружностей в плоскостях, перпендикулярных к оси.

Михаил Остроградский

§ 24

ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Представим, что плоский многоугольник $ABCDE$ вращается вокруг прямой AB (рис. 176, а). При этом каждая его точка, не принадлежащая прямой AB , описывает окружность с центром на этой прямой. Весь многоугольник $ABCDE$, вращаясь вокруг прямой AB , описывает некоторое тело вращения (рис. 176, б). Прямая AB – ось этого тела.

Плоскость, которая проходит через ось тела вращения, является его *плоскостью симметрии*. Таких плоскостей симметрии каждое тело вращения имеет бесконечно много.

Любая плоскость, проходящая через ось тела вращения, пересекает это тело. Образованное сечение – его называют *осевым сечением* – симметрично относительно оси. В частности, осевое сечение тела вращения может состоять из двух плоских фигур, симметричных относительно оси (рис. 177).

Сечением тела вращения плоскостью, перпендикулярной к оси, является круг, или плоское кольцо, или несколько колец и т. п. Для примера представим тело, образованное вращением фигуры (см. рис. 178) вокруг прямой AB . Если его пересекать плоскостями, которые перпендикулярны к оси и проходят через точки A , B , C , то в сечении получим соответственно круг, круг и кольцо, два кольца. Если тело вращения выпуклое, то секущая плоскость, перпендикулярная к оси вращения, пересекает его по кругу (рис. 179).

Чтобы задать тело вращения, достаточно назвать его ось и фигуру, вращением которой оно образовано. Описывая такое тело словами, вместо оси иногда называют отрезок, принадлежащий ей. Например, вместо «тело, образованное вращением

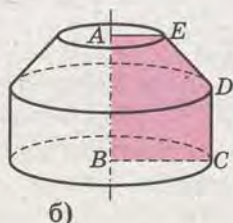
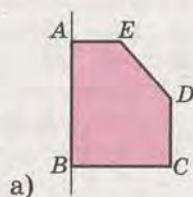


Рис. 176

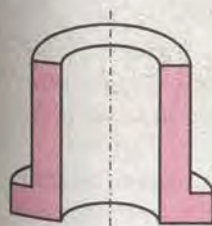


Рис. 177

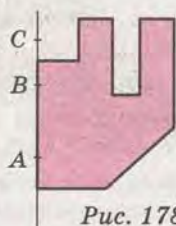


Рис. 178

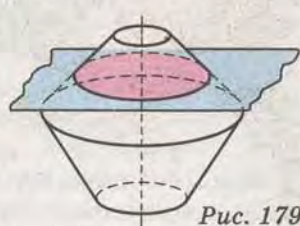
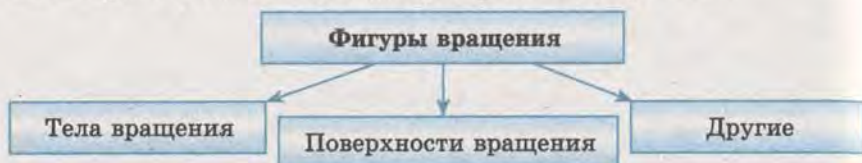


Рис. 179

треугольника вокруг оси, содержащей его сторону», говорят короче: «тело, образованное вращением треугольника вокруг его стороны».

Следует различать понятия «фигура вращения» и «тело вращения». Не каждая фигура является телом. Например, круг, кольцо, сфера – фигуры вращения, но не тела. Соотношения между разными видами фигур вращения поданы на схеме. Другими тут названы фигуры вращения, не являющиеся ни телами, ни поверхностями. Например, окружность, объединение шара с плоским кольцом (см. рис. 127, а) и т. п.



Примеры материальных моделей тел вращения: хоккейная шайба, линза, заклепка, снаряд, патрон, труба, катушка, обычная бутылка, пробирка, колба, спортивный диск, обруч и т. п. Большинство деталей, изготовленных на токарном станке, имеют форму тел вращения. Но, например, сверло, шпилька с нарезкой – не тела вращения.

Каждая фигура вращения – это некоторое множество окружностей.

Проекцией окружности на плоскость, не перпендикулярную к плоскости окружности, является *эллипс* (рис. 180). Поэтому наглядное изображение тела вращения содержит эллипсы. Эллипс имеет центр симметрии и две оси симметрии. Самое простое уравнение эллипса в декартовой системе координат имеет вид:



Рис. 180

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Строить эллипсы можно с помощью шаблонов или от руки.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как можна образовать тело вращения?
2. Что такое ось вращения; осевое сечение тела вращения?
3. Какой фигурой может быть осевое сечение тела вращения? А сечение плоскостью, перпендикулярной к оси вращения?
4. Как связаны между собой фигуры вращения и тела вращения? Покажите это с помощью диаграммы.



Выполним вместе

1. Какую плоскую фигуру надо вращать вокруг прямой l , чтобы получить фигуру, изображенную на рисунке 181?

РЕШЕНИЕ. Данную фигуру можно получить, вращая вокруг прямой l : а) $\triangle AOB$; б) $\triangle ABC$; в) $\triangle KAB$, где $K \in OC$. При вращении вокруг прямой l отрезка OB получим круг, отрезок AB опишет кривую поверхность, а AO отобразится на себя.

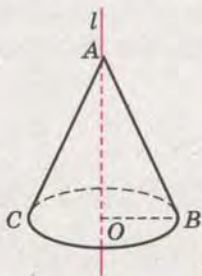


Рис. 181

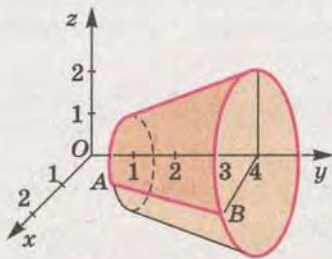


Рис. 182

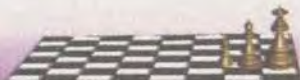
2. Изобразите фигуру, которая образуется при вращении отрезка с концами в точках $A(1; 1; 0)$ и $B(2; 4; 0)$ вокруг оси Oy .

РЕШЕНИЕ. Начертим систему координат в пространстве и изобразим в ней данные точки A и B (рис. 182). Вращаясь вокруг оси Oy , точки A и B опишут окружности радиусов 1 и 2. Отрезок AB опишет часть кривой поверхности (боковую поверхность усеченного конуса).



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



898. Назовите примеры фигур вращения из окружающей среды.

899. Какие из приведенных на рисунке 183 фигур являются телами вращения?

900. Какая фигура образуется при вращении точки вокруг прямой, которая:

- а) не проходит через данную точку;
б) проходит через данную точку?

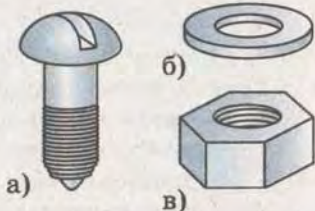


Рис. 183

901. Какая фигура образуется при вращении отрезка AB вокруг прямой, которая перпендикулярна к AB и:
 а) проходит через одну из точек A или B ;
 б) не пересекает отрезок AB ;
 в) пересекает отрезок AB в точке C ?
902. Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 2 см вращается вокруг одного из катетов. Найдите площадь осевого сечения полученного тела вращения.
903. Ромб с диагоналями 6 см и 8 см вращается вокруг одной из диагоналей. Найдите площадь осевого сечения.
904. Какая фигура будет осевым сечением тела, образованного вращением правильной четырехугольной пирамиды вокруг высоты?

905. Нарисуйте тело, образованное вращением прямоугольника вокруг его стороны.
906. Нарисуйте тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг: а) катета; б) гипотенузы.
907. Может ли плоскость симметрии тела вращения не проходить через его ось?
908. Нарисуйте тела вращения, проекции которых на две взаимно перпендикулярные плоскости изображены на рисунке 184.

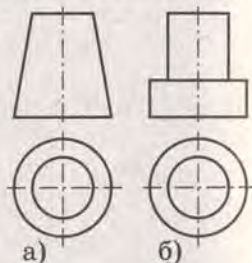


Рис. 184

909. В плоскости прямоугольника вне его и параллельно одной из его сторон проведена прямая. Нарисуйте тело, образованное вращением этого прямоугольника вокруг данной прямой.
910. Может ли быть невыпуклым тело, образованное вращением вокруг оси выпуклой плоской фигуры?
911. Может ли центр симметрии тела вращения не принадлежать данному телу? Приведите примеры.
912. Нарисуйте фигуру, образующуюся вращением куба вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней куба.
913. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника, равна 30 см, точками K и P разделена на три равные части. Найдите длины окружностей, которые описывают эти точки при вращении треугольника вокруг его катета.
914. Найдите площадь осевого сечения тела, образованного вращением равностороннего треугольника вокруг его стороны, если ее длина 2 дм.

915. Трапеция, боковая сторона которой перпендикулярна к основанию, вращается вокруг этой боковой стороны. Найдите площади фигур, описанных вращением оснований трапеции, если их длины 3,5 см и 5,2 см.
916. Сколько метров стыковых швов пришлось сварить электросварщикам, сооружающим газопровод длиной 1450 км, с использованием двадцатиметровых труб диаметром 1420 мм?
917. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ см и $AD = 7$ см вращается сначала вокруг стороны AB , а потом вокруг стороны AD . Найдите отношение площадей осевых сечений образованных тел вращения.

Б

918. Кривая задана уравнением $y = x^2$, $x \in [0; 3]$. Нарисуйте поверхность, образующуюся вращением этой кривой вокруг: а) оси Oy ; б) оси Ox .
919. Начертите фигуру, образованную вращением кривой $y = \frac{4}{x}$, $x \in [1; 4]$ вокруг:
а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) прямой $y = x$; г) прямой $y = -x$.
920. Нарисуйте фигуру, полученную вращением прямой $y = x$ вокруг осей координат, если: а) $x \in [0; 3]$; б) $x \in [1; 4]$; в) $x \in [-2; 5]$.
921. Прямоугольник $ABCD$, у которого $AC = d$ и $\angle CAD = \alpha$, является осевым сечением тела вращения. Какую плоскую фигуру вращали? Каковы ее размеры? Рассмотрите все возможные случаи.
922. Равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α является осевым сечением некоторого тела вращения. Какую плоскую фигуру вращали? Каковы ее размеры? Сколько решений имеет задача?
923. Треугольник ABC , у которого $AC = BC = a$, $\angle C = 120^\circ$, вращается вокруг прямой, которая содержит высоту треугольника, проведенную из вершины A . Выполните соответствующий рисунок. Найдите длины окружностей, которые вращаясь опишет каждая из вершин треугольника.
924. Тело образовано вращением прямоугольного треугольника вокруг меньшего катета, который с гипотенузой образует угол α . Найдите отношение площади круга, описанного большим катетом, к площади осевого сечения тела.
925. Квадрат $ABCD$ вращается вокруг прямой, проходящей через точку A , параллельно диагонали BD .



- а) Найдите сторону квадрата и площадь осевого сечения тела вращения, если при этом вращении точка C описывает окружность длиной 8π см.
- б) Решите задачу а) в случае, если ось вращения образует со стороной AB угол 15° .

В

926. Постройте фигуру, образованную вращением параллелограмма вокруг большей из его диагоналей.
927. Нарисуйте фигуру, образованную вращением плоской w -подобной ломаной из четырех равных звеньев вокруг ее крайнего звена.
928. Нарисуйте фигуру, образованную вращением окружности вокруг ее касательной. Является ли эта фигура телом вращения?
929. Отрезок a и прямая l не принадлежат одной плоскости. Нарисуйте фигуру, образованную вращением отрезка a вокруг прямой l .
- 930*. Нарисуйте осевое сечение тела, образованного вращением куба вокруг его диагонали.

**Упражнения для повторения**

931. Центр одного основания куба и середины сторон второго основания являются вершинами пирамиды. Найдите площадь поверхности пирамиды, если ребро куба равно a .
932. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде площади оснований равны Q_1 и Q_2 , а площадь боковой поверхности S . Найдите площадь диагонального сечения.
933. Диагонали основания прямого параллелепипеда равны 10 см и 16 см, а угол между ними — 60° . Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если его меньшая диагональ равна 26 см.

**ЦИЛИНДР**

Цилиндром называется тело, образованное вращением прямоугольника вокруг его стороны.

Если прямоугольник $OABO_1$ вращается вокруг оси OO_1 (рис. 185), его стороны OA и O_1B описывают равные круги, лежащие в параллельных плоскостях. Эти круги называют *основаниями*, а их радиус — *радиусом цилиндра*. Сторона AB , параллельная оси цилиндра, описывает кривую поверхность,

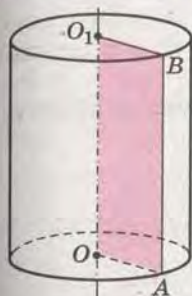


Рис. 185

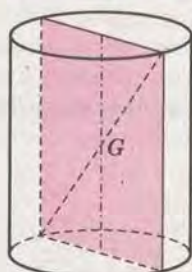


Рис. 186

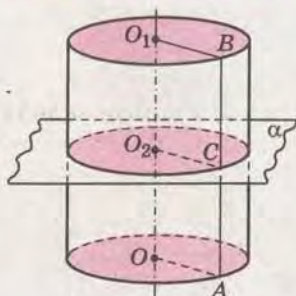


Рис. 187

которую называют *боковой поверхностью* цилиндра. Каждый отрезок этой поверхности, равный AB , — *образующая цилиндра*. Все образующие одного цилиндра равны и параллельны друг другу, поскольку каждая из них равна вращающейся стороне прямоугольника, и параллельна оси цилиндра. Длина образующей — *высота цилиндра*; она равна расстоянию между плоскостями оснований.

Все осевые сечения цилиндра — равные прямоугольники (рис. 186). Их диагонали проходят через середину G отрезка, который соединяет центры оснований цилиндра. Поэтому точка G — центр симметрии цилиндра. Плоскость, проходящая через точку G перпендикулярно к оси цилиндра, — плоскость его симметрии. Другие плоскости симметрии цилиндра проходят через его ось.

Каждая секущая плоскость, перпендикулярная к оси цилиндра, пересекает его по кругу, равному основанию (рис. 187). Ведь любая точка C образующей AB удалена от оси OO_1 на расстояние $CO_2 = OA$. Плоскость, пересекающая все образующие цилиндра, но не перпендикулярная к ним, пересекает боковую поверхность цилиндра по эллипсу (рис. 188).

Плоскость, которая проходит через образующую цилиндра и не имеет с ним других общих точек, называется *касательной плоскостью* к цилиндру. Она перпендикулярна к осевому сечению цилиндра, проведенному через эту же образующую (рис. 189).

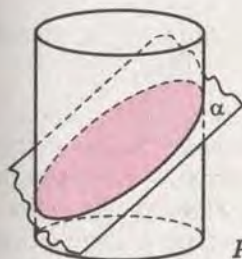


Рис. 188

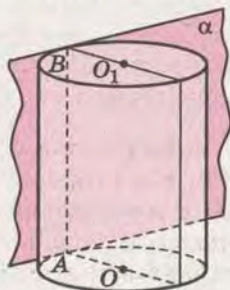


Рис. 189

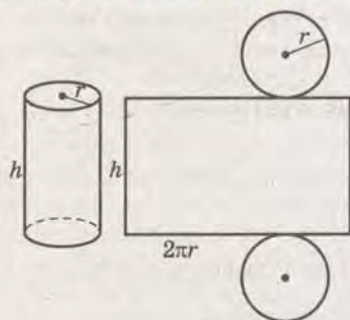


Рис. 190

Если поверхность цилиндра разрезать по окружностям оснований и какой-либо образующей, а потом развернуть на плоскости, получим *развертку цилиндра* (рис. 190). Она состоит из прямоугольника – развертки боковой поверхности цилиндра – и двух равных кругов.

Если радиус цилиндра r , а высота h , то его боковую поверхность можно развернуть в прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и h . Площадь

этой развертки $2\pi rh$ принимают за площадь боковой поверхности цилиндра. Поэтому, если r и h – радиус основания и высота цилиндра, то площадь его боковой поверхности $S_{\text{б}} = 2\pi rh$. Более строгий вывод этой формулы приведен на с. 267.

Чтобы найти площадь поверхности цилиндра $S_{\text{ц}}$, надо к площади его боковой поверхности прибавить площади оснований:

$$S_{\text{ц}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h).$$

Примеры физических тел, имеющих форму цилиндра: металлическая бочка, консервная банка, хоккейная шайба, графитовый стержень в батарейке. Цилиндр двигателя внутреннего сгорания или поршневого насоса, ствол шахты, отверстие, просверленное в доске перпендикулярно к ее грани, – полости цилиндрической формы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Тело, образованное вращением прямоугольника вокруг его стороны, в курсах для высших учебных заведений называют *прямым круговым цилиндром*. Цилиндр в широком понимании – это тело, составленное из двух ограниченных плоских областей, которые можно совместить параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих их соответствующие точки (рис. 191). Под это определение подходят каждая призма и тела, подобные изображенным на рисунке 192. Если образующие такого цилиндра перпендикулярны к плоскости основания,

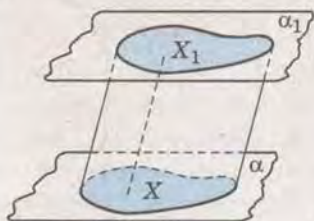


Рис. 191

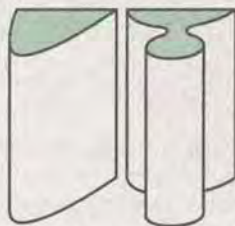


Рис. 192

его называют *прямым цилиндром*. Если его основания – круги, его называют *круговым*. Из всех цилиндров только прямой круговой является телом вращения. Далее будем рассматривать только прямые круговые цилиндры, называя их просто цилиндрами.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое цилиндр? Назовите его элементы.
2. Чем является осевое сечение цилиндра?
3. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной (параллельной) к его оси?
4. Каким может быть сечение цилиндра плоскостью, проведенной под некоторым углом к оси цилиндра?
5. Что такое развертка поверхности цилиндра?
6. Как можно определить площадь поверхности цилиндра?
7. Что такое «цилиндр в широком понимании»? Какими бывают такие цилиндры?



Выполним вместе

1. Осевые сечения двух разных цилиндров – равные прямоугольники со сторонами 4 м и 6 м. Найдите площадь поверхности того цилиндра, у которого она больше.

РЕШЕНИЕ. Найдём по формуле $S = 2\pi r(r + h)$ площади поверхностей обоих цилиндров.

1) Если $r = 2$ и $h = 6$, то $S = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$ (м²);

2) если $r = 3$ и $h = 4$, то $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi$ (м²).

ОТВЕТ. 42π м².

2. Цилиндр с радиусом 1 и высотой 0,5 пересекается плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной от нее на x . Как зависит площадь и периметр сечения от x ?

РЕШЕНИЕ. Пусть сечение ABB_1A_1 цилиндра удалено от оси OO_1 на $OC = x$ (рис. 193). Тогда $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2}$. Искомая площадь сечения $S = AA_1 \cdot AC \cdot 2 = \sqrt{1 - x^2}$, а периметр

$$P = 2(AA_1 + AB) = 1 + 4\sqrt{1 - x^2}.$$

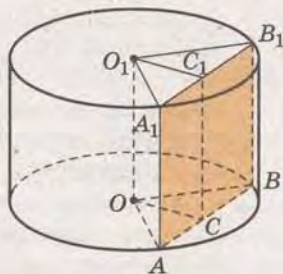


Рис. 193



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



934. Приведите примеры тел из окружающей среды, имеющих цилиндрическую форму.
935. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, высота которого равна 10 см, а радиус основания – 2 см.
936. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник со сторонами 4 см и 5 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
937. Диагональ осевого сечения цилиндра образует с плоскостью основания угол 45° . Как относится высота цилиндра к радиусу основания?
938. Радиус цилиндра r , а высота h . Найдите диагональ осевого сечения цилиндра.
939. Сколько существует плоскостей, которые пересекают данный цилиндр: а) на два равных цилиндра; б) на две равные фигуры?

А

940. Радиус цилиндра r , а диагональ осевого сечения d . Найдите: а) высоту цилиндра; б) площадь диагонального сечения; в) площадь поверхности цилиндра.
941. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите: а) высоту цилиндра; б) диаметр основания; в) площадь боковой поверхности цилиндра.
942. Площадь осевого сечения цилиндра S . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра. Можно ли по этим данным однозначно найти площадь поверхности цилиндра?
943. Докажите, что плоскость, которая проходит через образующую цилиндра, но не касается его, пересекает цилиндр по прямоугольнику.
944. Площадь поверхности и площадь боковой поверхности цилиндра равны 50 см^2 и 30 см^2 . Найдите радиус и высоту цилиндра.
945. Из квадрата, площадь которого Q , свернули боковую поверхность цилиндра. Найдите площадь основания цилиндра.
946. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его радиус r , а образующую из центра основания видно под углом α .
947. Найдите площадь поверхности цилиндра, если диаметр его основания d из центра другого основания виден под углом α .

948. Дан прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что площади боковых поверхностей цилиндров, образованных вращением этого прямоугольника вокруг неравных сторон, равны.
949. Как относятся площади сечений цилиндра плоскостями, проходящими через его образующую, если угол между этими плоскостями 30° , а одна из плоскостей проходит через ось цилиндра?
950. Радиус цилиндра r , а высота h . Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, которая перпендикулярна к основанию и отсекает от окружности основания дугу 60° .
951. Высота цилиндра равна 16 см, радиус 10 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, которая отдалена от нее на 60 мм.
952. Параллельно оси цилиндра, радиус основания которого равен a , проведена плоскость, пересекающая основание цилиндра по хорде, которая стягивает дугу, градусная мера которой 90° . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если образованное сечение – квадрат.
953. В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, пересекающая нижнее основание цилиндра по хорде, которую видно из центра этого основания под углом α . Диагональ образованного сечения равна d и образует с плоскостью основания угол β . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Б

954. На каком расстоянии от оси цилиндра, параллельно ей, надо провести сечение площадью 48 см^2 , если стороны сечения пропорциональны числам 1 и 2, а радиус основания равен 5 см?
955. Хорду длиной a одного основания цилиндра видно из центров оснований под углами 90° и 60° . Найдите высоту цилиндра.
956. Сколько квадратных метров жести пойдет на изготовление водосточной трубы длиной 5 м и диаметром 20 см, если на швы добавляют 10 % площади поверхности трубы?
957. Хватит ли 8500 м^2 изолянта для двукратного покрытия ею километра трубы газопровода диаметром 1420 мм?
958. Высота консервной банки цилиндрической формы равна 4 см, а радиус основания – 6 см. Сколько таких банок можно изготовить из $15\,000 \text{ м}^2$ жести, если 10 % материала идет на отходы и швы?



959. Диаметр цилиндрического парового котла длиной 3,8 м равен 0,8 м. Найдите давление пара на полную поверхность котла, если на 1 см^2 пар давит с силой 10 Н.
960. Точки A и B лежат на окружностях разных оснований цилиндра. Найдите расстояние от оси цилиндра до прямой AB , если радиус основания цилиндра равен R , а отрезок $AB = 2R$ и образует с плоскостью основания угол 60° .
961. Плоскости двух сечений AA_1B_1B и AA_1C_1C цилиндра проходят через образующую AA_1 . Их площади равны по 10 см^2 , а площадь сечения BB_1C_1C равна 16 см^2 . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
962. Плоскость пересекает основание цилиндра по хордам длиной 6 см и 8 см, расстояние между которыми равно 14 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания равен 5 см. Рассмотрим два случая.
963. Вершины прямоугольника лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 12 см, а радиус основания 8 см. Найдите площадь прямоугольника, если его стороны относятся как 1 : 2.
964. $ABCD$ – осевое сечение цилиндра. Его площадь равна 240 см^2 . Точки A , B и M лежат на окружности нижнего основания, E и F – середины отрезков MB и MD . Найдите площадь поверхности цилиндра, если $EF = 13 \text{ см}$.
965. Точка M делит дугу AB нижнего основания цилиндра, мера которой равна 90° , в отношении 1 : 2, считая от точки A . Образующая $AC = 8 \text{ см}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости SAM и угол, который прямая BC образует с этой плоскостью, если радиус основания цилиндра равен 2 см.
966. Все вершины квадрата, сторона которого равна a , лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна к одной из сторон квадрата и образует с его плоскостью угол α . Найдите радиус цилиндра.
- 3**
967. $ABCD$ и $MNPK$ – два взаимно перпендикулярных осевых сечения цилиндра, их диаметры AD и MK принадлежат одному основанию. Точка F – середина образующей AB . Найдите площадь поверхности цилиндра, если площадь осевого сечения равна 16 см^2 и $FK \perp AC$.
968. Правильный тетраэдр и цилиндр расположены так, что скрещивающиеся ребра тетраэдра – диаметры оснований цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если ребро тетраэдра равно a .



- 969*. Две вершины куба лежат на оси цилиндра, шесть — на окружностях его оснований. Найдите радиус и высоту цилиндра, если ребро куба равно a .
970. К цилиндру радиуса r проведена касательная прямая под углом α к плоскости его основания. Найдите расстояние от центра нижнего основания до этой прямой, если расстояние от этого центра до точки касания равно d .
971. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Сделайте из плотной бумаги развертку цилиндра, осевое сечение которого — квадрат со стороной 16 см.

Упражнения для повторения

972. Основание прямой призмы — ромб с острым углом α . Большее диагональное сечение призмы имеет площадь S . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
973. Высота правильной треугольной пирамиды равна 12 см, а апофема — 13 см. Вычислите площадь поверхности пирамиды.
974. Основание пирамиды — треугольник с углами α и β и радиусом описанной окружности R . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании пирамиды равны γ .



§26 КОНУС И УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Конусом называется тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг его катета.

Если прямоугольный треугольник OPA вращать вокруг катета PO , его гипотенуза PA опишет боковую поверхность, а катет OA — круг — основание конуса (рис. 194). Радиус этого круга называют радиусом конуса, точку P , отрезок PO , прямую PO — соответственно вершиной, высотой и осью конуса. Все осевые сечения конуса — равные равнобедренные треугольники. Каждая плоскость, проходящая через ось конуса, является плоскостью его симметрии. Центра симметрии конус не имеет.

Отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности его основания, — образующая конуса. Все образующие конуса равны,



Рис. 194

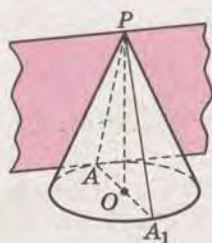


Рис. 195

поскольку каждая из них равна гипотенузе треугольника, вращением которого образован конус. Плоскость, проходящая через образующую конуса и не имеющая с ним других общих точек, называется *касательной плоскостью* к конусу. Она перпендикулярна к осевому сечению, проведенному через эту же образующую (рис. 195).

Если боковую поверхность конуса разрезать по какой-либо образующей и развернуть на плоскости, получим ее развертку. Развертка боковой поверхности конуса радиуса r с образующей l является сектором радиуса l , длина дуги которого $2\pi r$ (рис. 196). Площадь такой развертки — площадь боковой поверхности конуса. Она во

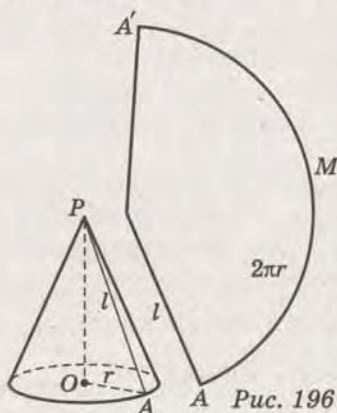


Рис. 196

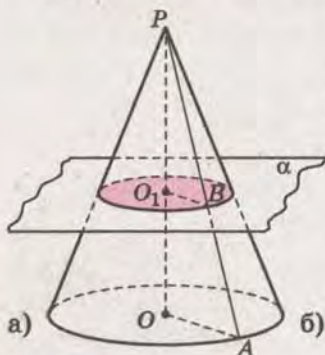
столько раз меньше площади круга радиуса l , во сколько раз $2\pi r$ меньше $2\pi l$. Поэтому $S_{\text{бок}} : \pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l$, откуда $S_{\text{бок}} = \pi r l$.

Более строгое выведение этой формулы дано на с. 267.

Чтобы найти площадь поверхности конуса $S_{\text{к}}$, надо к площади его боковой поверхности прибавить площадь основания:

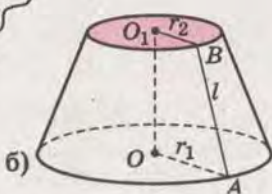
$$S_{\text{к}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(r + l).$$

Секущая плоскость, параллельная основанию, пересекает конус по кругу. При этом получаем два тела вращения: меньший конус, гомотетичный данному, и усеченный конус (рис. 197). Усеченный конус можно рассматривать и как тело, образованное вращением прямоугольной трапеции вокруг меньшей ее боковой стороны. Усеченный конус огра-



а)

Рис. 197



б)



Рис. 198



Рис. 199

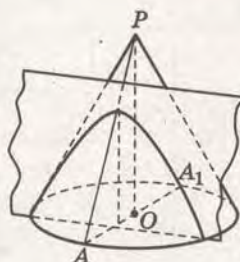


Рис. 200

ничен двумя кругами – его основаниями – и боковой поверхностью. Расстояние между основаниями – *высота* усеченного конуса. Отрезок, соединяющий ближайшие точки кругов оснований, – *образующая*. Длину этого отрезка также называют образующей усеченного конуса.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляют по формуле:

$$S = \pi l(r_1 + r_2),$$

где r_1, r_2, l – радиусы его оснований и образующая (см. задачу 2, с. 195).

Если секущая плоскость не параллельна основанию конуса, но пересекает все его образующие, она пересекает коническую поверхность по эллипсу (рис. 198). Если секущая плоскость параллельна только одной из образующих конуса, она пересекает коническую поверхность по части параболы (рис. 199). Если секущая плоскость параллельна двум образующим, она пересекает коническую поверхность по части гиперболы (рис. 200).

В теоретических курсах конусом часто называют поверхность, образованную вращением одной из двух пересекающихся прямых вокруг второй (рис. 201). Именно такие «конусы» имеют в виду, говоря о конических сечениях.

Если секущая плоскость проходит через вершину такого «конуса», то она пересекает его по двум пересекающимся прямым. Если же она не проходит через вершину конуса, то пересекает его поверхность по окружности, эллипсу, параболе или гиперболе. Вместе их называют *кривыми второго порядка*, поскольку в декартовой системе координат на плоскости им соответствуют уравнения второй степени.

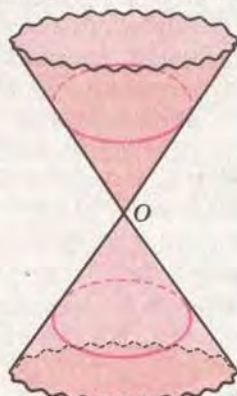
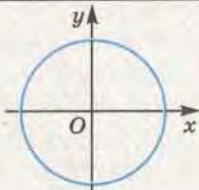
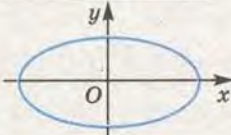
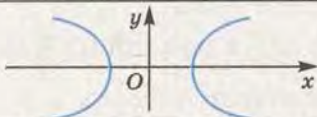


Рис. 201

Кривые второго порядка

Фигура	Вид	Уравнение
Окружность		$x^2 + y^2 = r^2$
Эллипс		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Парабола		$y^2 = 2px$
Гипербола		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Форму конусов имеют насыпанные на горизонтальной поверхности кучи песка, зерна, угля, породы, щебня и т. п. Каждому такому материалу соответствует *угол естественного уклона* – угол наклона образующей к плоскости основания конуса. Для песка он равен приблизительно 30° , для угля – 42° , для породы – 46° .

ЗАМЕЧАНИЕ. В курсах высшей геометрии *конусом* (в широком понимании) называют тело, образованное всеми отрезками, соединяющими данную точку – вершину конуса – с точками некоторой ограниченной плоской фигуры – основания конуса (рис. 202). При этом конус, в основании которого круг, называется *круговым*. А если прямая, соединя-

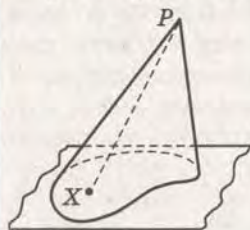


Рис. 202

яющая вершину такого конуса с центром его основания, перпендикулярна к основанию, его называют *прямым круговым конусом*. Из всех конусов только прямой круговой является телом вращения. Выше шла речь именно о таких конусах. И дальше будем рассматривать только прямые круговые конусы, называя их просто конусами.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте определение конуса.
2. Назовите элементы конуса.
3. Какой фигурой является осевое сечение конуса? А сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси?
4. Как можно вычислить площадь боковой поверхности конуса? А площадь поверхности конуса?
5. Сформулируйте определение усеченного конуса и его элементов.
6. Как вычислить площадь боковой поверхности усеченного конуса?
7. Что вы знаете о конических сечениях?
8. Что такое «конус в широком понимании»?

Выполним вместе

1. Высота конуса 4, образующая 5. Найдите угол сектора, являющегося разверткой боковой поверхности этого конуса.

РЕШЕНИЕ. Радиус основания конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (рис. 203). Поэтому длина окружности его основания $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Такая же длина дуги сектора AMA_1 . Эта длина во столько раз меньше длины окружности радиуса $PA = 5$, во сколько раз искомый угол φ сектора меньше 360° . Следовательно, $\varphi : 360^\circ = 6\pi : 10\pi$, откуда $\varphi = 216^\circ$.

ОТВЕТ. 216° .

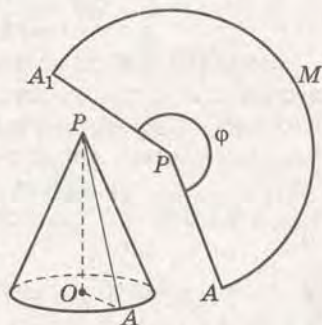


Рис. 203

2. Выведите формулу для вычисления площади боковой поверхности усеченного конуса.

РЕШЕНИЕ. Если радиусы оснований усеченного конуса $OA = r_1$, $O_1B = r_2$, а образующая $AB = l$ (см. рис. 197), то площадь его боковой поверхности равна разности площадей боковых поверхностей конусов с образующими PA и PB . Обозначим: $PB = x$, тогда $PA = x + l$. Из подобия треуголь-

ников PBO_1 и PAO имеем: $\frac{x}{r_2} = \frac{x+l}{r_1}$, $x = \frac{r_2 l}{r_1 - r_2}$.

Следовательно, $S = \pi r_1(x + l) - \pi r_2 x = \pi l(r_1 + r_2)$.

3. Вычислите площадь поверхности тела, образованного вращением равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом при вершине 120° вокруг прямой, содержащей боковую сторону треугольника.

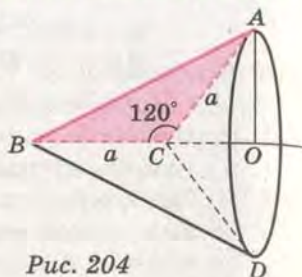


Рис. 204

РЕШЕНИЕ. Пусть $\triangle ABC$, у которого $AC = BC = a$, $\angle C = 120^\circ$, вращается вокруг прямой BC (рис. 204).

Образованная фигура является конусом радиуса OA и высотой BO , из которого вырезали конус радиуса OA и высотой CO . Тогда площадь образованной фигуры равна сумме площадей боковых поверхностей этих конусов, т. е. $S = S_{BO} + S_{CO}$, где $S_{BO} = \pi \cdot AO \cdot AB$ и $S_{CO} = \pi \cdot AO \cdot AC$.

Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов найдем AB :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ,$$

$$AB^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2, \quad AB = a\sqrt{3}.$$

Если $\angle ACB = 120^\circ$, то $\angle ABC = 30^\circ$ и $AO = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Тогда } S_{BO} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3\pi a^2}{2} \text{ и } S_{CO} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } S = \frac{3\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} + 1).$$

$$\text{ОТВЕТ. } S = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} + 1).$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



975. Приведите примеры тел из окружающей среды, имеющих форму конуса или усеченного конуса.
976. Высота конуса равна 8 м, радиус — 6 м. Найдите образующую.
977. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите радиус и высоту конуса.
978. Может ли осевым сечением усеченного конуса быть равнобедренная трапеция?
979. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 6 см, а высота — 5 см. Найдите площадь его осевого сечения.

980. Высота конуса равна радиусу основания. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.
981. Образующая конуса равна 5 см, высота – 4 см. Найдите площадь его боковой поверхности.
982. Найдите площадь боковой поверхности конуса радиуса R , осевым сечением которого является прямоугольный треугольник.
983. Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите:
- а) высоту конуса;
 - б) площадь осевого сечения;
 - в) радиус основания;
 - г) площадь основания конуса;
 - д) периметр осевого сечения.
984. Площадь основания конуса 9 см^2 , а площадь его поверхности 27 см^2 . Под каким углом наклонена образующая к плоскости основания?
985. Высота конуса 6 см, радиус основания 4 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу 60° .
986. Через вершину конуса проведена плоскость, которая отсекает от окружности основания дугу 90° и наклонена к плоскости основания конуса под углом 60° . Найдите угол при вершине сечения.
987. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если разверткой его боковой поверхности является круговой сектор с дугой, которая равна: а) 90° ; б) 180° ; в) 270° .
988. Сколько квадратных метров ткани нужно, чтобы пошить конусообразную палатку высотой 3 м и диаметром 4 м?
989. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 дм и 6 дм, а образующая 5 дм. Найдите:
- а) высоту усеченного конуса;
 - б) площадь его осевого сечения;
 - в) угол наклона образующей к плоскости основания.
990. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите площадь его боковой поверхности.
991. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг:
- а) меньшего катета;
 - б) большего катета;
 - в) гипотенузы.
992. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a вокруг прямой, проведенной через вершину прямого угла, параллельно гипотенузе.

993. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением прямоугольной трапеции с основаниями 2 см и 6 см и высотой 3 см вокруг: а) меньшей боковой стороны; б) большего основания; в) меньшего основания.

Б

994. Докажите, что из всех сечений конуса плоскостями, проходящими через вершину, наибольший периметр имеет осевое сечение.
995. Верно ли, что из всех сечений конуса плоскостями, проходящими через вершину, наибольшую площадь имеет осевое сечение?
996. Образующие двух конусов наклонены к плоскостям оснований под равными углами. Докажите, что высоты этих конусов относятся как образующие. А как относятся площади их боковых поверхностей?
997. Докажите, что площади основания конуса и его сечения плоскостью, параллельной основанию, относятся как квадраты расстояний этих плоскостей от вершины конуса.
998. Высота конуса h . На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была в 2 раза меньше площади основания?
999. Разность между образующей и высотой конуса равна a , а угол между ними α . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
1000. Радиус основания конуса 2 см, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей основания и осевого сечения. Найдите высоту конуса.
1001. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проведенной через вершину конуса на расстояние 12 см от центра его основания, если высота конуса равна 20 см, а радиус основания 25 см.
1002. Через две образующие конуса, угол между которыми α , проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β . Найдите высоту конуса, если площадь сечения равна S .
1003. Найдите угол между образующей и высотой конуса, если площадь его осевого сечения равна площади сечения, проведенного через вершину конуса под углом 60° к плоскости его основания.
1004. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, которая проходит через вершину конуса под углом α к его основанию, если поверхность конуса равна Q , а образующая образует с плоскостью основания угол φ .

1005. Две взаимно перпендикулярные образующие делят боковую поверхность конуса на части, площади которых пропорциональны числам 1 и 2. Найдите высоту конуса, если радиус его основания равен r .
1006. Круг разделили на два сектора так, что площадь одного из них в 3 раза больше площади второго. Из каждого из этих секторов сделали боковые поверхности конусов. Найдите отношение высот образовавшихся конусов.
1007. Найдите площадь поверхности усеченного конуса, если его образующая равна l , наклонена к плоскости основания под углом α , а площади оснований относятся как 1 : 4.
1008. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая l с плоскостью основания образует угол α . Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.
1009. Площади оснований усеченного конуса и его боковой поверхности пропорциональны числам a , b , c . Найдите угол между образующей конуса и его основанием.
1010. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением ромба со стороной a и углом 60° вокруг прямой, содержащей его сторону.
1011. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением треугольника со сторонами 7 см и 8 см и углом между ними 120° вокруг прямой, содержащей наименьшую сторону треугольника.
1012. Треугольник со сторонами 6 см и 10 см и углом между ними 120° вращается вокруг высоты, проведенной из вершины наименьшего угла. Найдите площадь поверхности тела вращения.

В

1013. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением тупоугольного треугольника с острыми углами α и β и наименьшей высотой h вокруг стороны, противоположной углу α .
- 1014*. Через середину высоты конуса проведена прямая, образующая с высотой угол φ и пересекающая боковую поверхность конуса в точках A и B . Найдите расстояние AB , если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α (рис. 205).
- 1015*. Через вершину конуса проведена плоскость, делящая его боковую

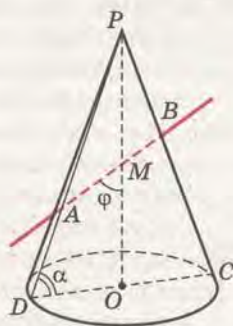


Рис. 205

поверхность на две части. Если эти части развернуть на плоскость, то получим два сектора с углами α и β . Найдите угол при вершине в проведенном сечении.

1016. **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.** Сделайте из плотной бумаги развертки конуса и усеченного конуса.

Упражнения для повторения

1017. Найдите угол между диагоналями осевого сечения цилиндра, если площадь основания относится к площади осевого сечения как $\pi : 4$.
1018. Отрезок, соединяющий точки окружностей верхнего и нижнего оснований цилиндра, равен a и образует с плоскостью основания угол α , а его проекцию на плоскость основания видно из центра этого основания под углом β . Найдите площадь поверхности цилиндра.
1019. Нарисуйте развертку правильного октаэдра, ребро которого равно 2 см. Найдите площадь его поверхности.



ШАР И СФЕРА

Шаром называется тело, образованное вращением круга вокруг его диаметра. Сферой называется фигура, образованная вращением окружности вокруг ее диаметра.

Любой отрезок, соединяющий центр шара с какой-либо точкой его поверхности, называют *радиусом шара*. Длину этого отрезка также называют радиусом шара.

Отрезок, который соединяет две точки поверхности шара и проходит через центр, – *диаметр шара*, его концы – *диаметрально противоположные точки шара*.

Плоскость, которая проходит через диаметр шара, – *диаметральная плоскость*. Она является плоскостью симметрии шара и разбивает его на два равных полушара. Сечение шара диаметральной плоскостью называют *большим кругом*. Окружность больших кругов называют *экватором шара*, а точки пересечения поверхности шара с осью, перпендикулярной к плоскости экватора, – *полюсами шара*.

Как могут быть расположены в пространстве шар и плоскость?

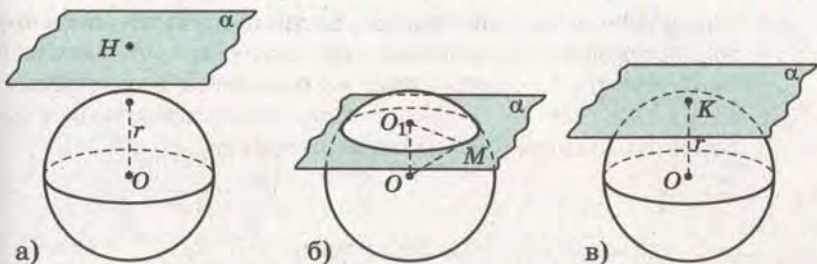


Рис. 206

Пусть расстояние от центра шара до плоскости равно d , а радиус шара r . Возможны три случая (рис. 206):

1. Если $d > r$, плоскость и шар не имеют общих точек.

2. Если $d < r$, плоскость пересекает шар по кругу радиуса

$$O_1M = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Из этой формулы следует, что сечение шара тем больше, чем меньше d , и что плоскости, равноудаленные от центра, пересекают шар по равным кругам.

3. Если $d = r$, плоскость и шар имеют только одну общую точку. В этом случае говорят, что плоскость *касается шара*, а их общую точку называют *точкой касания*.

Теорема 25. *Касательная к шару плоскость перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны шар с центром в точке O и плоскость α , касающаяся этого шара в точке A (рис. 207). Докажем, что $OA \perp \alpha$.

Предположим, OA — наклонная к плоскости α . Тогда должен существовать и перпендикуляр OA_1 к этой плоскости. По предположению $A_1 \in \alpha$ и $OA_1 < OA$, точка A_1 общая для плоскости и шара. Следовательно, A не единственная их общая точка. В таком случае плоскость α не касательная к шару, что противоречит условию теоремы. Значит, радиус шара OA не может быть наклонной к плоскости α , т. е. $OA \perp \alpha$. Теорема доказана.

Прямая, имеющая с шаром только одну общую точку, называется *касательной к шару* (и к его сфере). Она перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Докажите это по рисунку 208.

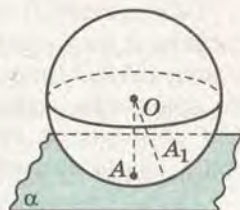


Рис. 207

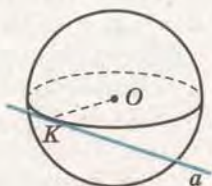


Рис. 208

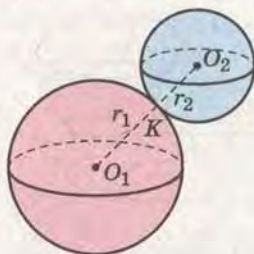


Рис. 209

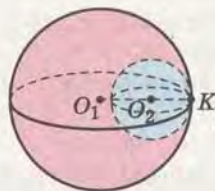


Рис. 210

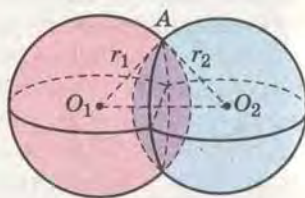


Рис. 211

Если две сферы имеют только одну общую точку, говорят, что они *касаются друг друга*. Касание сфер может быть *внешним* (рис. 209) и *внутренним* (рис. 210). В первом случае расстояние между их центрами равно сумме радиусов ($O_1O_2 = r_1 + r_2$), во втором – разности радиусов ($O_1O_2 = r_1 - r_2$). Если $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, то данные сферы пересекаются по окружности (рис. 211).

Часть шара, которую отсекает плоскость, называется *шаровым сегментом* (рис. 212). Его поверхность состоит из *сферического сегмента* и круга – основания шарового сегмента. Расстояние от основания шарового сегмента до параллельной ему плоскости, касательной к нему, называют его *высотой*.

Часть шара, находящаяся между двумя параллельными секущими плоскостями, – *шаровой слой* (рис. 213). Кривая поверхность шарового слоя называется *сферическим поясом*. Перпендикуляр, проведенный из точки одного основания шарового слоя к плоскости второго, называют *высотой* шарового слоя (сферического пояса).

Сферический сегмент и сферический пояс можно рассматривать и как фигуры вращения. Если вращением полуокружности $CABD$ (рис. 214) вокруг диаметра CD образуется сфера, то вращением дуги AC этой полуокружности вокруг диаметра CD образуется сегментная поверхность, а вращением дуги AB – сферический пояс.

Тело, образованное вращением выпуклого кругового сектора вокруг радиуса, ограничивающего его, называется *шаровым сектором*. Поверхность шарового сектора состоит из сферичес-



Рис. 212



Рис. 213



Рис. 214



кого сегмента и боковой поверхности конуса. На рисунке 215 изображены два шаровых сектора: выпуклый и не выпуклый.

Тело, образованное вращением кругового сектора вокруг прямой, проходящей через центр окружности (рис. 216), также называют шаровым сектором. Его поверхность состоит из поверхности сферического пояса и боковых поверхностей двух конусов.

Примеры материальных шаров: шарики подшипника, спортивные ядра, охотничья дробь, конфеты-драже, некоторые окатыши, получаемые из руды на обогатительной фабрике, и т. п.

Измеряют диаметры шаров кронциркулем (рис. 217) или штангенциркулем (рис. 218), а если нужна большая точность – микрометром.

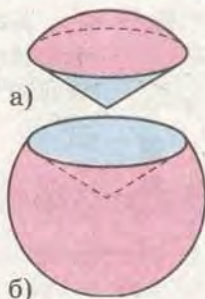


Рис. 215

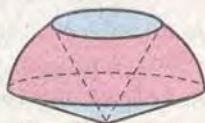


Рис. 216

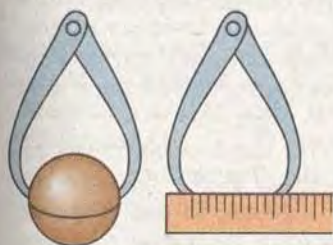


Рис. 217

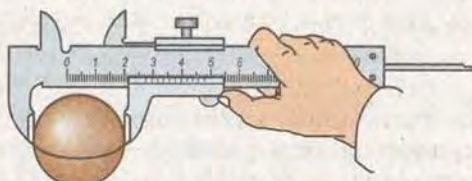


Рис. 218

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое шар? Что такое сфера? Назовите их элементы.
2. Что такое диаметральной плоскость шара? А экватор; полюс?
3. Какой фигурой является сечение шара плоскостью?
4. Какую плоскость называют касательной к шару? Каковы ее свойства?
5. Какую прямую называют касательной к шару? Каковы ее свойства?
6. При каком условии одна сфера касается другой?
7. Что такое шаровой сегмент; сегментная поверхность; основание и высота шарового сегмента?



8. Что такое шаровой слой; шаровой пояс; основание и высота шарового пояса?
9. Какую фигуру называют шаровым сектором?

**Выполним вместе**

1. Из одной точки к шару провели две касательные прямые. Докажите, что расстояния от данной точки до точек касания равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть MA и MB — отрезки касательных, проведенных к шару из точки M , а O — центр данного шара (рис. 219). Треугольники AMO и BMO равны по общей гипотенузе MO и катетам OA , OB . Следовательно, $MA = MB$, что и надо было доказать.

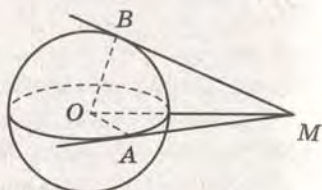


Рис. 219

2. Три шара радиуса r касаются одной и той же плоскости и каждый из них касается двух других. Найдите радиус шара, который касается плоскости и трех данных шаров.

РЕШЕНИЕ. Пусть шары с центрами O_1 , O_2 , O_3 касаются плоскости α в точках A , B , C (рис. 220). Тогда $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r$ и $O_1A = O_2B = O_3C = r$. Если четвертый шар радиуса x касается трех данных шаров радиуса r , то его центр O расположен так, что $OO_1 = OO_2 = OO_3 = x + r$. Точка O равноудалена от O_1 , O_2 , O_3 . Следовательно, прямая, перпендикулярная к плоскости α и проходит через точку O , пересекает плоскость равностороннего треугольника $O_1O_2O_3$ в его центре M . Прямая MO пересекает плоскость α в точке H , в которой четвертый шар касается этой плоскости.

Как видим, $OH = x$, $OM = r - x$. Из прямоугольного треугольника OMO_1 имеем:

$$OO_1^2 = OM^2 + MO_1^2,$$

$$(r + x)^2 = (r - x)^2 + \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$\text{откуда } x = \frac{r}{3}.$$

$$\text{ОТВЕТ. } \frac{r}{3}.$$

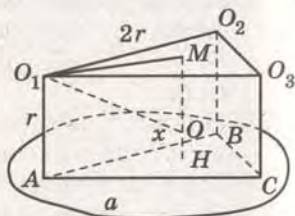


Рис. 220





ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполним устно



1020. Приведите примеры тел из окружающей среды, имеющих форму шара или сферы.
1021. Найдите площадь большого круга шара и длину экватора, если его радиус 2 м.
1022. Диаметр шара 38 дм, а плоскость удалена от его центра на 20 дм. Имеет ли эта плоскость с шаром общие точки?
1023. Точки A и B лежат на поверхности шара радиуса 12 см. Найдите длину отрезка AB , если из центра шара его видно под углом 60° .
1024. Две сферы радиусов r_1 и r_2 имеют единственную общую точку. Найдите расстояние между их центрами.
1025. Составьте уравнение сферы радиуса 5 с центром в точке $A(1; 2; 3)$.
1026. Дан шар радиуса 10 м и секущая плоскость на расстоянии 6 м от центра. Чему равна высота образованного шарового сегмента?
1027. Чему равна высота шарового слоя, если его основания находятся на расстояниях 2 см и 5 см от центра шара?

А

1028. Точки A и B лежат на поверхности шара радиуса 50 см. Найдите расстояние от центра шара до отрезка $AB = 80$ см.
1029. Точка A лежит на сфере радиуса 13 см и удалена от концов диаметра MN на расстояния, пропорциональные числам 5 и 12. Найдите эти расстояния.
1030. Шар радиуса 10 см пересекли плоскостью, удаленной от центра на 6 см. Найдите площадь основания образованного шарового сегмента.
1031. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Как относится площадь основания образованного шарового сегмента к площади большого круга?
1032. Две окружности радиусов 30 см и 40 см лежат в параллельных плоскостях и на поверхности шара радиуса 50 см. Найдите высоту образованного сферического пояса.
1033. Найдите радиус шара, если площади оснований шарового слоя высотой 15 см равны 64π см² и 19π см².
1034. Угол в осевом сечении шарового сектора равен 60° . Найдите отношение высоты шарового сегмента к высоте соответствующего конуса.

1035. На поверхности шара радиуса r даны две точки, расстояние между которыми равно радиусу шара. Найдите кратчайшее расстояние между этими точками по поверхности шара.
1036. Радиус шара равен 2. Секущая плоскость удалена от его центра на x . Как зависит площадь сечения S от x ?
1037. Радиус шара равен r . Через конец радиуса проведена плоскость под углом α к нему. Найдите площадь сечения.
1038. Вершины равностороннего треугольника со стороной 10 см лежат на поверхности шара радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра шара к плоскости треугольника.
1039. На сфере радиуса 26 см даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 12 см, 16 см и 20 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти точки.
1040. Прямые, которым принадлежат стороны треугольника, касаются шара радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра шара к плоскости треугольника, если его стороны равны 26 см, 28 см и 30 см.
1041. Прямые, которым принадлежат стороны ромба с углом 150° , касаются сферы диаметра 20 см. Найдите периметр и площадь ромба, если расстояние от центра сферы к плоскости ромба равно 8 см.

Б

1042. Шар радиуса r касается граней двугранного угла. Найдите расстояние от центра шара до ребра угла, если этот угол равен:
а) 60° ; б) 90° ; в) 120° ; г) α .
1043. Из точки M , которая удалена от центра шара радиуса 2 см на 6 см, проведены касательные MA и MB (A, B — точки касания). Найдите расстояние AB , если плоскости MOA и MOB перпендикулярны.
1044. Сколько существует сфер радиуса 2, касающихся координатных плоскостей? Напишите уравнение одной из них.
1045. Найдите геометрическое место центров сфер радиуса r :
а) которые касаются данной плоскости;
б) которые проходят через данную точку.
1046. Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся:
а) данной плоскости в данной на ней точке;
б) данной прямой в данной точке.
1047. Радиус Земли равен 6400 км. На какую высоту над горизонтом следует подняться, чтобы линия горизонта проходила на расстоянии 100 км от наблюдателя?

1048. Радиус Земли 6,4 тыс. километров. Какой путь проходят за сутки вследствие вращения Земли города Одесса, Львов и Киев, широты которых $46^\circ 29'$, $49^\circ 49'$ и $50^\circ 27'$?
1049. **ЗАДАЧА С НЕОЖИДАННЫМ ОТВЕТОМ.** Представим, что два шара – один большой, как Земля, а второй, как футбольный мяч, – по экваторам обтянуты обручами. Если каждый обруч продлить на 1 м, они отойдут от поверхностей шаров (равномерно) на некоторые расстояния. Где это расстояние будет больше: у большего или меньшего шара?
1050. Сфера проходит через точки $A(2; 0; 1)$, $B(2; 0; 3)$, $C(1; 4; 0)$, $D(1; 2; 2)$. Найдите ее радиус и координаты центра.
1051. Как расположены шар радиуса a и плоскость равностороннего треугольника со стороной $3a$, если все вершины треугольника удалены от центра на $2a$?
1052. Точки M и N делят диаметр AB шара на части, пропорциональные числам 1, 2 и 3. Через точки M и N под углом α к прямой AB проведены параллельные плоскости. Найдите отношение площадей образованных сечений.
1053. Шар радиуса 10 см касается одной грани двугранного угла меры 120° и пересекает другую грань по кругу, площадь которого равна 36π см². Найдите расстояние от центра шара до ребра двугранного угла.
1054. Два взаимно перпендикулярные сечения шара имеют общую хорду длиной 16 см. Найдите радиус шара, если площади этих сечений равны 100π см² и 144π см².
1055. Из точки поверхности шара радиуса $2\sqrt{3}$ см проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Найдите длины этих хорд.

B

- 1056*. Как построить сферу, которая проходит через три данные точки и касается данной плоскости?
1057. Найдите геометрическое место точек, из которых можно провести к данному шару радиуса r три касательные, образующие прямой трехгранный угол.
1058. Найдите геометрическое место центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную прямую.
- 1059*. В двугранный угол, равный 60° , вписаны две сферы радиуса r , касающиеся друг друга. Найдите радиус сферы, которая касается обеих граней двугранного угла и обеих сфер (рис. 221).

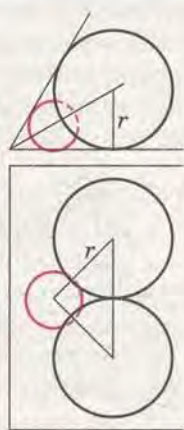


Рис. 221



- 1060*. Четыре сферы равных радиусов r расположены так, что каждая из них касается внешне трех других. Найдите радиус сферы, которая внутренним образом касается всех четырех сфер.
- 1061*. Шесть сфер радиуса r , центры которых являются вершинами правильного шестиугольника со стороной $2r$, касаются сферы радиуса $3r$. Найдите радиус сферы, касающейся всех семи сфер.
- 1062*. На прямой l расположены центры трех шаров радиусов 1, 2 и 5, причем шар радиуса 2 касается двух других внешним образом. Прямая p касается всех трех шаров. Найдите угол и расстояние между прямыми l и p .



Упражнения для повторения

1063. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см вокруг прямой, проходящей через вершину среднего угла параллельно противоположной стороне.
1064. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, если его боковая поверхность равна 80π см², а образующая и высота соответственно равны 10 см и 8 см.
1065. Найдите площадь поверхности правильной треугольной пирамиды, апофема которой l образует с высотой угол α .



КОМБИНАЦИИ ТЕЛ

До сих пор мы рассматривали свойства самых простых геометрических тел: призм, пирамид, цилиндров, конусов, шаров. Но многим специалистам часто приходится иметь дело с более сложными телами, которые являются разными комбинациями

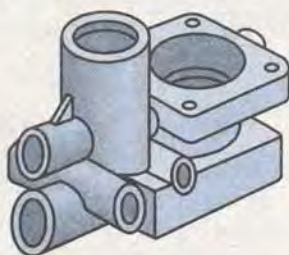


Рис. 222

(объединениями) названных тел. Например, на рисунке 176 изображено тело, состоящее из усеченного конуса и цилиндра, на рисунках 210, 211 – другие комбинации тел. А литейщикам, формовщикам, фрезеровщикам, электросварщикам, токарям, слесарям и другим рабочим приходится создавать детали более сложных конфигураций (рис. 222).

Из разнообразных комбинаций геометрических тел особого внимания заслуживают *вписанные* и *описанные тела*. Уточним эти понятия. Шар называется *вписанным в многогранник*, если он касается каждой грани многогранника. Многогранник называется *вписанным в сферу*, если все его вершины лежат на сфере.

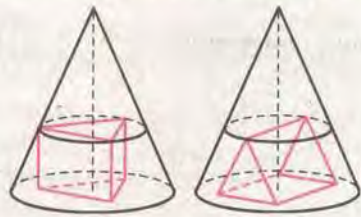


Рис. 223

Аналогичные определения можно сформулировать и для других фигур, вписанных друг в друга. Но следует иметь в виду, что такие общие определения не гарантируют однозначного положения вписанных фигур. Например, правильную треугольную призму в конус можно вписать так, как показано на рисунке 223, и еще несколькими способами.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если вписанное тело рисуется другими цветами, то его видимые линии можно изображать сплошными.

Для однозначного задания комбинаций рассматриваемых тел следует уточнить, как именно вписано одно из них в другое. Но для пар призма–цилиндр и пирамида–конус принята договоренность, которую выражают такими определениями.

Призма называется *вписанной в цилиндр*, если основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра. Пирамида называется *вписанной в конус*, если их вершины совпадают, а основание пирамиды вписано в окружность основания конуса. Если одно тело вписано в другое, другое тело называют описанным вокруг первого. На рисунке 224 изображены четырехугольные пирамиды – вписанная в конус и описанная вокруг конуса.

Как комбинации цилиндров, конусов и усеченных конусов можно рассматривать тела, образованные вращением многоугольников. Например, тело, образованное вращением правильного шестиугольника вокруг его стороны, является объединением цилиндра и двух усеченных конусов, из которого изъято два конуса (рис. 225).

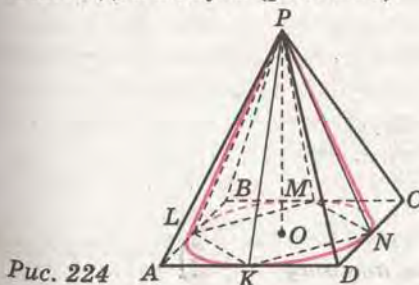


Рис. 224

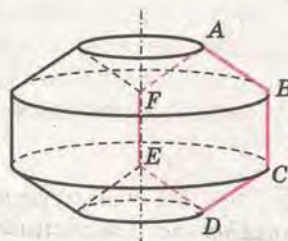


Рис. 225

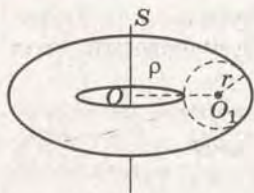


Рис. 226

Фигура, образованная вращением круга вокруг оси, которая лежит в его плоскости, но не пересекает круг, называется **тором** (рис. 226). Форму тора имеют надувная камера автомобильной шины, баян, спортивный обруч. Чтобы задать тор, достаточно назвать радиус r вращающегося круга и расстояние ρ от центра этого круга до оси вращения.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какой шар называется вписанным в многогранник?
2. Какой многогранник называется вписанным в сферу?
3. Дайте определение призмы, вписанной в цилиндр.
4. Дайте определение пирамиды, вписанной в конус.
5. Какая фигура называется тором?



Выполним вместе

1. Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите длину ребра куба, вписанного в конус так, что четыре его вершины лежат на основании, а четыре – на боковой поверхности конуса.

РЕШЕНИЕ. Пусть PM – образующая конуса, проходящая через вершину A_1 вписанного в конус куба (рис. 227).

Вершина A куба принадлежит радиусу OM . По условию задачи $PM = l$, $\angle PMO = \alpha$. Если ребро куба равно x , то

$$OA = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

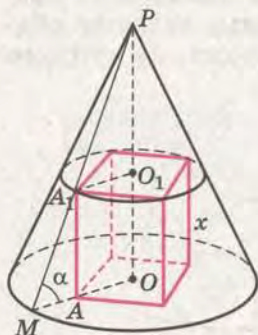


Рис. 227

Из прямоугольного $\triangle POM$ имеем:

$$OM = PM \cdot \cos \alpha = l \cos \alpha,$$

$$MA = MO - OA = l \cos \alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $\frac{A_1A}{MA} = \operatorname{tg} \alpha$, то $\frac{x}{l \cos \alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}} = \operatorname{tg} \alpha$,

$$\text{откуда } x = \frac{\sqrt{2} l \sin \alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg} \alpha}.$$

ОТВЕТ. $\frac{\sqrt{2} l \sin \alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg} \alpha}.$

2. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. Найдите высоту пирамиды, если двугранный угол при ребре основания равен α .

РЕШЕНИЕ. Пусть сторона основания данной в задаче пирамиды (рис. 228) равна a . Тогда $OK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и из $\triangle SOK$

найдем SO : $SO = OK \operatorname{tg} \alpha$, т. е. $SO = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha$.

Выразим a через R .

Из $\triangle O_1OA$ ($\angle O = 90^\circ$) $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Если $SO_1 < SO$, то $OO_1 = SO - R = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha - R$. В общем случае $AO = |SO - R|$.

По теореме Пифагора $AO_1^2 = AO^2 + OO_1^2$, т. е.
 $R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha - R\right)^2$. Упростив это уравнение, полу-

чим: $\frac{\sqrt{3}}{3} R \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{12} (4 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$, откуда $a = \frac{4\sqrt{3} R \operatorname{tg} \alpha}{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

$$\text{Тогда } SO = \frac{4\sqrt{3} R \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{3}}{(4 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot 6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{2R \operatorname{tg}^2 \alpha}{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Для составления уравнения можно воспользоваться и другим способом. Пусть SS_1 — диаметр шара (рис. 229). Тогда $\angle SAS_1 = 90^\circ$. По свойству высоты треугольника, проведенной из вершины прямого угла, $AO^2 = SO \cdot S_1O$, или $AO^2 = SO(2R - SO)$. Подставив значение AO и SO , получим такое же уравнение, как и в первом случае.

ОТВЕТ. $SO = \frac{2R \operatorname{tg}^2 \alpha}{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.



Рис. 228

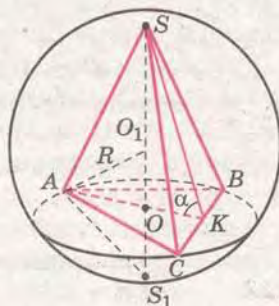


Рис. 229

**ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ****Выполните устно**

1066. Найдите радиус шара, вписанного в куб с ребром a .
1067. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в куб с ребром 2 см.
1068. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, в который вписан шар радиуса R .
1069. В любой ли цилиндр можно вписать шар?
1070. Чему равна высота усеченного конуса, в который вписан шар радиуса R ?
1071. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник со стороной a . Чему равна высота пирамиды, вписанной в этот конус?
1072. Площадь боковой поверхности конуса Q , его радиус r . Найдите длину бокового ребра вписанной в этот конус правильной пирамиды:
а) треугольной; б) четырехугольной; в) n -угольной.

А

1073. Найдите диагональ куба, вписанного в шар радиуса 8 см.
1074. Нарисуйте описанную вокруг шара правильную призму:
а) четырехугольную; б) треугольную; в) шестиугольную.
1075. Нарисуйте описанную вокруг шара правильную пирамиду:
а) четырехугольную; б) треугольную; в) пятиугольную.
1076. Нарисуйте вписанную в конус правильную пирамиду:
а) треугольную; б) четырехугольную; в) шестиугольную.
1077. Впишите в правильную четырехугольную пирамиду куб так, чтобы одна его грань лежала на основании пирамиды, а вершины противоположной грани:
а) на боковых ребрах пирамиды; б) на апофемах пирамиды.
1078. В основании прямой призмы – прямоугольный треугольник. Опишите вокруг нее: а) цилиндр; б) сферу.
1079. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы 27 см^2 . Найдите площадь боковой поверхности вписанного в нее цилиндра.
1080. Найдите радиус шара, вписанного в правильную n -угольную пирамиду, сторона основания которой равна a , а двугранный угол при ребре основания – α , если:
а) $n = 4$; б) $n = 3$; в) $n = 6$; г) $n = m$.



1081. Вокруг шара радиуса r описан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите площадь осевого сечения конуса при $r = 2$ м, $\alpha = 50^\circ$.
1082. В прямой параллелепипед с диагоналями основания 6 см и 8 см вписан шар. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.
1083. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 12 см и образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите радиус сферы, описанной вокруг пирамиды.
1084. Вокруг правильной шестиугольной призмы, высота которой равна 12 см, описана сфера радиуса 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
1085. Радиус сферы, описанной вокруг правильной треугольной пирамиды, равен 13 см, а расстояние от ее центра до плоскости основания пирамиды – 5 см. Найдите боковое ребро пирамиды. Рассмотрите два случая.
1086. В шар радиуса 10 см вписана пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
1087. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 10 м и 24 м, а все двугранные углы при основании пирамиды равны по 60° . Найдите площадь поверхности конуса, описанного в данную пирамиду.

Б

1088. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α . Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол β . Найдите боковую поверхность конуса, описанного вокруг пирамиды.
1089. В основании прямой призмы лежит треугольник со стороной c и прилежащими углами α и β . Диагональ боковой грани, проходящей через данную сторону, образует с плоскостью основания угол φ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного вокруг призмы.
1090. В сферу радиуса r вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите высоту пирамиды.
1091. Найдите диаметр сферы:
- описанной вокруг прямоугольного параллелепипеда с измерениями a , b и c ;
 - описанной вокруг прямой призмы, если высота призмы равна c , а в ее основании лежит прямоугольный треугольник с катетами a и b ;

в) описанной вокруг пирамиды, боковые ребра которой попарно перпендикулярны, а их длины a , b и c .

1092. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a ; точка A_1 – середина отрезка AP . Найдите площадь поверхности тела, которое является общей частью данного куба и пирамиды $PABCD$ (рис. 230).

1093. Боковое ребро наклонной призмы равно 12 см, а радиус вписанной сферы – 3 см. Найдите угол наклона бокового ребра призмы к плоскости основания.

1094. Ребро правильного октаэдра равно a . Найдите радиус сферы: а) вписанной; б) описанной; в) которая касается всех ребер данного правильного октаэдра.

1095. Найдите площадь поверхности прямой призмы, если периметр ее основания равен P , а радиус вписанной сферы – r .

1096. Найдите радиус сферы, вписанной в усеченный конус, если радиусы его оснований равны r и R .

1097. Центр шара, описанного вокруг правильной четырехугольной пирамиды, делит ее высоту в отношении 3 : 4. Найдите меру двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

1098. В правильный тетраэдр $SABC$ вписана сфера радиуса R . Найдите радиус сферы, которая касается данной и трех граней тетраэдра, выходящих из вершины S .

1099. Радиус основания конуса равен R , а высота – H . Найдите ребро вписанного в него куба.

1100. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, высота которой в 2 раза больше стороны основания, если эта призма вписана в конус, высота которого равна $5\sqrt{3}$ см, а радиус основания – 10 см.

1101. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α , а расстояние от основания высоты до середины бокового ребра равно m . Найдите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в пирамиду.

1102. В основании прямой призмы лежит треугольник со стороной c и прилежающими углами α и β . Диагональ боковой грани, проходящей через данную сторону, образует с

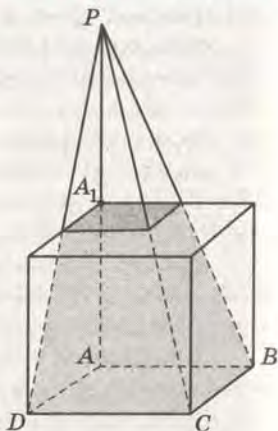


Рис. 230

плоскостью основания угол φ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в призму.

В

1103. Сфера радиуса R касается тора радиусов ρ и r по окружности. Найдите длину этого круга (рис. 231).

1104. Ребро правильного тетраэдра равно a . Найдите радиус шара, который касается всех ребер тетраэдра.

1105*. Найдите радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, если $AB = CD = 6$, а каждое из остальных его ребер равно $\sqrt{34}$.

1106*. Найдите плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры вписанного и описанного шаров совпадают. Обобщите задачу на случай n -угольной пирамиды.

1107. Центры двух равных сфер лежат на диагонали куба. Каждая сфера касается трех граней куба, которые сходятся в одном из концов отмеченной диагонали, и второй сферы. Найдите отношение радиуса сферы к ребру куба.

1108*. Ребро куба равно a , AB – его диагональ. Найдите радиус сферы, которая касается трех граней, сходящихся в вершине A , и трех ребер, выходящих из вершины B .

1109*. Ребро куба равно a . В этот куб вписана сфера. Найдите длину хорды этой сферы, которую она отсекает на отрезке, соединяющем середины скрещивающихся ребер куба.

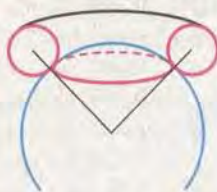


Рис. 231



Упражнения для повторения

1110. Вершины треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см лежат на поверхности шара. Найдите радиус шара, если расстояние от его центра к плоскости треугольника равно 10 см.

1111. Вершины квадрата со стороной $12\sqrt{2}$ см лежат на поверхности шара, а расстояние от центра шара к плоскости квадрата равно 16 см. Найдите высоты сферических сегментов, на которые шар разбивает плоскость квадрата.

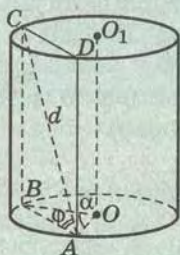
1112. Два правильных треугольника лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины этих треугольников лежат на одной сфере.



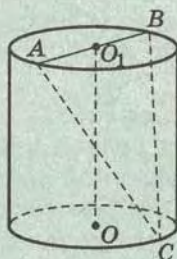
ЗАДАЧИ ПО ГОТОВЫМ РИСУНКАМ

А

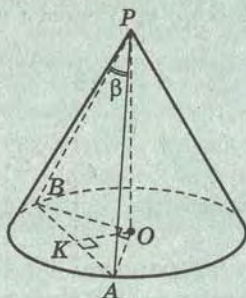
$OO_1 \parallel (ABC)$.
Найдите S_6 .



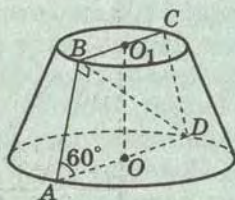
$AB = BC = AC$,
 $S_{\triangle ABC} = Q$.
Найдите S_6 .



$OK = d$, $\angle AOB = 90^\circ$.
Найдите S_6 .

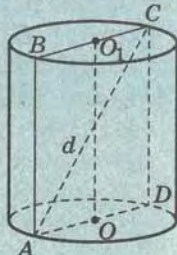


$OO_1 = 3$.
Найдите S_{π} .

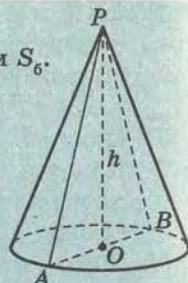


Б

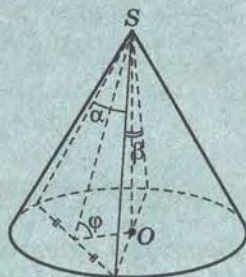
$S_{\pi} = 2S_6$.
Найдите S_{π} .



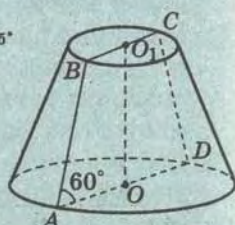
$S_6 : S_0 = 5 : 3$.
Найдите $S_{\triangle APB}$ и S_6 .



Найдите φ .



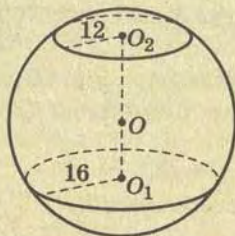
$S_{ABCD} = Q$.
Найдите S_6 .



А

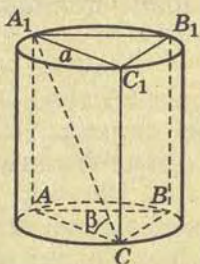
$$OO_1 : OO_2 = 3 : 4.$$

Найдите R шара.



$ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма.

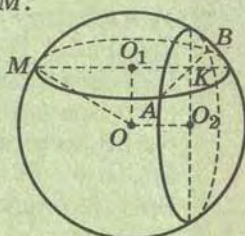
Найдите $S_{6\text{ц}}$



Б

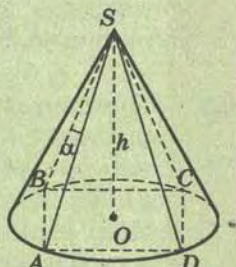
$$AB = 18, OO_1 = 8, OO_2 = 12, \angle O_1KO_2 = 90^\circ.$$

Найдите OM .



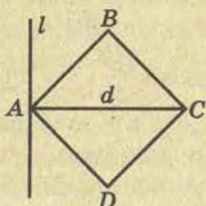
$SABCD$ – правильная пирамида, $\angle ASB = \alpha$.

Найдите $S_{6\text{к}}$



Найдите поверхность тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг прямой l .

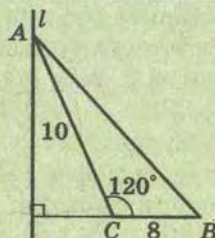
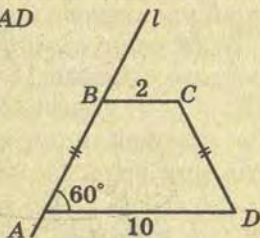
$ABCD$ – квадрат,
 $l \perp AC$.



$l \parallel AB$.



$BC \parallel AD$





ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. В цилиндр нельзя вписать призму, в основании которой лежит:
а) квадрат; б) прямоугольник; в) ромб, отличный от квадрата; г) треугольник.
2. Найдите площадь боковой поверхности тела, образованного вращением прямоугольника площадью Q вокруг одной из сторон.
а) $2Q$; б) πQ ; в) $2\pi Q$; г) $4\pi Q$.
3. Ортогональной проекцией сферы является:
а) круг; б) окружность;
в) эллипс; г) любая из перечисленных фигур.
4. Площадь диагонального сечения куба равна S . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного вокруг куба.
а) S ; б) πS ; в) $2\pi S$; г) $\pi S\sqrt{2}$.
5. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг большего из них. Найдите площадь поверхности образованного тела вращения.
а) $90\pi \text{ см}^2$; б) 65 см^2 ; в) 120 см^2 ; г) $65\pi \text{ см}^2$.
6. Шар радиуса 10 см пересекли плоскостью на расстоянии 6 см от центра. Найдите площадь сечения.
а) $16\pi \text{ см}^2$; б) $8\pi \text{ см}^2$; в) $64\pi \text{ см}^2$; г) $128\pi \text{ см}^2$.
7. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, которую видно из центра основания под углом 90° , а из вершины – под углом 60° . Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью сечения.
а) 90° ; б) $\arccos\sqrt{3}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.
8. В цилиндре на расстоянии 4 см от оси, параллельно ей, проведено сечение. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра 8 см, а радиус основания 5 см.
а) 8 см^2 ; б) 48 см^2 ; в) 72 см^2 ; г) 24 см^2 .
9. Найдите угол наклона образующей усеченного конуса к плоскости большего основания, если радиусы его оснований 3 см и 5 см, а площадь осевого сечения 16 см^2 .
а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) $\arctg 2$.
10. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 180° . Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.
а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .



**ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

- 1°. Прямоугольная трапеция вращается вокруг большей боковой стороны. Выполните рисунок. Из каких фигур состоит образованное тело вращения?
- 2°. Диаметр шара пересекает каждую из двух плоскостей под углом 30° и делится точками пересечения на три равные части. Найдите расстояние от каждой плоскости до центра шара, если его радиус равен 12 см.
- 3°. Плоскость пересекает конус по равнобедренному треугольнику со стороной a и отсекает от окружности основания ее четвертую часть. Найдите высоту конуса.
- 4°. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, в которую вписан шар радиуса 4 см, если двугранный угол при основании пирамиды равен 60° .
- 5°. Через две образующие конуса проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Найдите углы образованного сечения, если угол в осевом сечении конуса равен 120° .
- 6°. Найдите площадь поверхности цилиндра, в который вписана правильная треугольная призма, диагональ боковой грани которой равна d и образует с плоскостью основания угол α .
- 7°. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом при вершине α вокруг прямой, проходящей через вершину треугольника параллельно его основанию.
- 8°. Найдите высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна $8\sqrt{2}$ см², а угол в развертке боковой поверхности составляет 120° .
- 9°. Точки A и B принадлежат окружностям разных оснований цилиндра, радиус основания и высота которого равны 13 см и 10 см соответственно. Найдите длину отрезка AB , если он удален от оси цилиндра на 5 см.
- 10°. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 10 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскостей сечений, если площадь одного из них 169π см², а площадь большого круга сферы равна 200π см².
- 11°. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d . Найдите радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности.



ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 3

1. Если какую-либо фигуру вращать (на угол, не меньше 360°) вокруг какой-либо оси, каждая точка этой фигуры, за исключением точек оси, будет описывать окружность. Объединение всех таких окружностей представляет *фигуру вращения*. Если образованная фигура вращения является телом, ее называют *телом вращения*. Важнейшие тела вращения – цилиндр, конус, усеченный конус, шар, шаровой сегмент, шаровой сектор.
2. *Цилиндр* – тело, образованное вращением прямоугольника вокруг его стороны. Если цилиндр образован вращением прямоугольника $OABO_1$ вокруг стороны OO_1 , то прямая OO_1 – *ось цилиндра*, отрезки OA и O_1A опишут равные круги – *основания цилиндра*, а отрезок AB опишет кривую поверхность – *боковую поверхность цилиндра*. Каждый отрезок этой поверхности, равный AB , – *образующая цилиндра*. Поверхность цилиндра состоит из двух оснований и боковой поверхности. Основания цилиндра – равные круги, лежащие в параллельных плоскостях, боковую поверхность можно развернуть в прямоугольник. Поэтому, если радиус и высота цилиндра r и h , площадь его боковой поверхности $S = 2\pi rh$. А площадь поверхности $S = 2\pi r(r + h)$.
3. *Конус* – тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг его катета. При таком вращении один катет описывает круг – *основание конуса*, а гипотенуза – кривую поверхность, *боковую поверхность конуса*. Развертка последней – круговой сектор. Если радиус конуса r , а образующая l , то площадь боковой поверхности конуса $S = \pi rl$, а площадь поверхности $S = \pi r(r + l)$.
4. Секущая плоскость, параллельная основанию конуса, разрезает его на две части: меньший конус и *усеченный конус*. Усеченный конус имеет два основания – разные круги, лежащие в параллельных плоскостях, и боковую поверхность. Боковая поверхность усеченного конуса – часть боковой поверхности конуса. Если радиусы оснований усеченного конуса r_1 и r_2 , а образующая l , то площадь его боковой поверхности $S = \pi l(r_1 + r_2)$.
5. *Шар* – тело, образованное вращением круга вокруг его диаметра. *Центром шара* называют центр круга, вращением которого он образован. Отрезок, соединяющий

центр шара с произвольной точкой его поверхности, — радиус шара. Отрезок, который соединяет две произвольные точки поверхности шара, — его хорда. Хорда шара, которая проходит через центр, — *диаметр* шара. *Сфера* — поверхность шара; она может быть образована вращением окружности вокруг ее диаметра. Плоскость (прямую), которая имеет с шаром только одну общую точку, называют *касательной плоскостью (прямой)* к шару. Если две сферы имеют только одну общую точку, говорят, что они касаются в этой точке.

6. Секущая плоскость разрезает шар на два *шаровых сегмента*, а сферу — на два *сферических сегмента*. Две параллельные секущие плоскости разрезают шар на два шаровых сегмента и *шаровой слой*. Кривая поверхность шарового слоя — *сферический пояс*. Тело, образованное вращением выпуклого кругового сектора вокруг радиуса, его ограничивающего, — *шаровой сектор*.
7. Шар называется *вписанным в многогранник*, если он касается каждой грани многогранника. Многогранник называется *вписанным в сферу*, если все его вершины лежат на сфере.
8. Призма называется *вписанной в цилиндр*, если основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра. Пирамида называется *вписанной в конус*, если их вершины совпадают, а основание пирамиды вписано в окружность основания конуса. Если одно тело вписано в другое, то другое тело называют *описанным* вокруг первого.

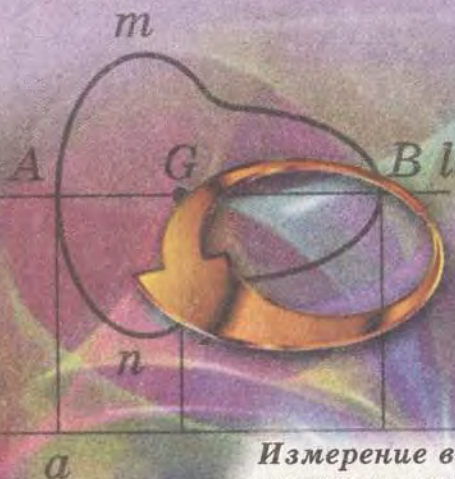
Объемы и площади поверхностей геометрических тел

Главные темы раздела:

- Понятие объема.
- Объем прямой призмы и цилиндра.
- Объем пирамиды и усеченной пирамиды.
- Объем конуса и усеченного конуса.
- Объем шара и его частей.
- Теорема Гульдина.
- Площади поверхностей.



РАЗДЕЛ 4



*Измерение величин является исходным
пунктом всех применений математики.*

А. Лебег



ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА

Каждое тело занимает часть пространства: кирпич – больше, чем карандаш, куб с ребром 1 дм – больше, чем с ребром 1 см. Чтобы можно было сравнивать такие части пространства, вводят понятие *объема*.

Объем – это количественная характеристика тела, удовлетворяющая таким условиям (свойствам объема):

1. Каждое тело имеет определенный объем, выраженный положительным числом.
2. Равные тела имеют равные объемы.
3. Если тело разбито на несколько частей, то его объем равен сумме объемов всех этих частей.
4. Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Объем – одна из величин, как и длина, площадь, мера угла. Значение объема задается не только числом, но и наименованием. Например, объем 1 дм³ можно представить как 1000 см³ и как 0,001 м³. Чтобы не усложнять изложение, в теоретических рассуждениях за единицу длины берут длину некоторого (единичного) отрезка и в зависимости от нее вводят единицы площади и объема. Площадь квадрата, сторона которого равна единичному отрезку, – единица площади, а объем куба, ребро которого равно единичному отрезку, – единица объема. При такой договоренности наименования можно не писать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Строгое изложение общей теории объемов является очень сложным. Поэтому тут, говоря об объемах тел, принимаем во внимание только простые тела: многогранники, цилиндры, конусы, сферы и разнообразные комбинации из конечного числа таких тел.

Объемы тел измеряют или вычисляют. Например, объем небольшой детали можно измерить с помощью мензурки с делениями (рис. 232), объем ведра – наливая в него воду посудой известного объема. Но объем комнаты, доменной печи подобным способом измерить невозможно. Их вычисляют. Например, объем куба с ребром a равен a^3 , а объем прямоугольного параллелепипеда вычисляют, пользуясь такой теоремой.

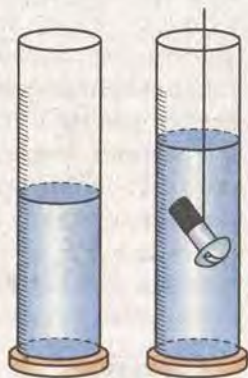


Рис. 232

Теорема 26. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим три случая.

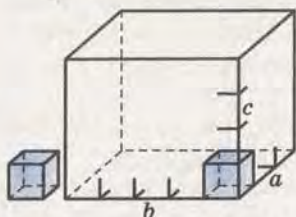


Рис. 233

1. Пусть измерения a , b , c прямоугольного параллелепипеда выражены натуральными числами. Такой параллелепипед можно разрезать на c слоев, каждый из которых содержит ab единичных кубиков (рис. 233). Следовательно, объем этого параллелепипеда

$$V = abc.$$

2. Пусть a , b , c – десятичные дроби с числом десятичных знаков не больше n . И пусть l – отрезок в 10^n раз короче единичного. Ребра данного параллелепипеда, длины которых a , b , c , можно разбить соответственно на 10^na , 10^nb и 10^nc таких отрезков. Числа 10^na , 10^nb , 10^nc натуральные. Поскольку $10^na \cdot 10^nb \cdot 10^nc = 10^{3n}abc$, то данный параллелепипед вмещает ровно $10^{3n}abc$ кубиков с ребром l . А единичный куб вмещает 10^{3n} таких кубиков, ведь $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$. Как видим, отношение объема данного параллелепипеда к объему единичного куба равно abc . Это значит, что объем данного параллелепипеда

$$V = abc.$$

3. Пусть хотя бы одно из чисел a , b , c выражается бесконечной десятичной дробью. Обозначим через a_1 и a_2 приближенные значения числа a с недостатком и с избытком с точностью до n десятичных знаков. С той же точностью приближенные значения с недостатком и с избытком числа b обозначим через b_1 и b_2 , а числа c – через c_1 и c_2 . Каждое из чисел a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 выражается конечной десятичной дробью. Поэтому, согласно доказанному в п. 2, объемы прямоугольных параллелепипедов с измерениями a_1 , b_1 , c_1 и a_2 , b_2 , c_2 соответственно равны $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$. Первый из этих параллелепипедов можно поместить вовнутрь данного параллелепипеда, а данный – вовнутрь другого. Следовательно, объем V данного параллелепипеда находится между $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$. Поскольку $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ – приближенные значения числа abc с любой наперед заданной точностью, то и в этом случае $V = abc$.

Теорема доказана.

Следствие. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Перечислите свойства объема.
2. В каких единицах определяют объем?
3. Как можно измерять объемы?
4. Чему равен объем куба с ребром a ?
5. Сформулируйте и докажите теорему об объеме прямоугольного параллелепипеда.

Выполним вместе

1. Площади попарно перпендикулярных граней прямоугольного параллелепипеда равны S_1 , S_2 и S_3 . Найдите его объем.

РЕШЕНИЕ. Если измерения параллелепипеда x , y , z , то $xy = S_1$, $xz = S_2$, $yz = S_3$. Перемножим эти равенства: $x^2 y^2 z^2 = S_1 S_2 S_3$. Следовательно, объем параллелепипеда $V = xyz = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

ОТВЕТ. $V = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α , а с плоскостью боковой грани — угол β . Найдите объем параллелепипеда, если его высота равна h .

РЕШЕНИЕ. Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $BB_1 = h$, $\angle B_1 D B = \alpha$, $\angle B_1 D C_1 = \beta$ (рис. 234). Из $\triangle B_1 B D$ ($\angle B = 90^\circ$) найдем BD и $B_1 D$:

$$BD = h \operatorname{ctg} \alpha \text{ и } B_1 D = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Из $\triangle B_1 C_1 D$ ($\angle C_1 = 90^\circ$) $B_1 C_1 = B_1 D \sin \beta$, т. е.

$$B_1 C_1 = \frac{h \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Тогда по теореме Пифагора из $\triangle BCD$ ($\angle C = 90^\circ$) можем найти ребро DC :

$$DC^2 = BD^2 - BC^2, \text{ т. е.}$$

$$\begin{aligned} DC^2 &= h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{h^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{h^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{h^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{h^2}{\sin^2 \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta), \end{aligned}$$

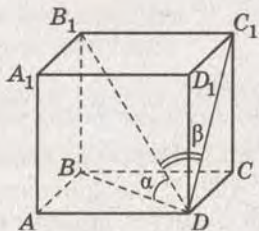


Рис. 234



$$\text{откуда } DC = \frac{h}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

Тогда

$$V = h \cdot \frac{h \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \frac{h^3 \sin \beta}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

$$\text{ОТВЕТ. } V = \frac{h^3 \sin \beta}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



1113. Объясните соотношение: $1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ дм}^3 = 1\,000\,000 \text{ см}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ мм}^3$.
1114. Ребро куба равно 5 дм. Чему равен его объем?
1115. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого равны 2 см, 3 см и 5 см.
1116. Чему равна площадь поверхности куба, если его объем равен 27 см^3 ?
1117. Из куса пластилина, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с размерами $1 \times 2 \times 4$, вылепили куб. Найдите ребро этого куба.
1118. Как изменится объем прямоугольного параллелепипеда, если все его измерения увеличить в 3 раза?
1119. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания равны 6 см и 8 см, а диагональ образует с плоскостью основания угол 45° .
1120. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания равны 3 см и 4 см, а площадь диагонального сечения 30 см^2 .

А

1121. Размеры кирпича $250 \times 120 \times 65 \text{ мм}$. Найдите его объем.
1122. Поле прямоугольной формы площадью 5 га вспахано на глубину 35 см. Сколько кубометров почвы перевернули?
1123. Найдите объем куба, если:
 - а) площадь его грани Q ;
 - б) диагональ куба d .
1124. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, если площадь ее основания 49 см^2 , а площадь боковой грани 56 см^2 .
1125. Объем куба равен V . Найдите длину его диагонали.

1126. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите объем призмы. Вычислите, если $d = 37$ см, $\alpha = 58^\circ$.
1127. Три свинцовых куба с ребрами 1 см, 6 см и 8 см переплавили в один куб. Найдите длину ребра этого куба.
1128. Для здоровья учеников необходимо, чтобы в классе на каждого ученика приходилось не меньше 6 м^3 воздуха. На скольких учеников рассчитана классная комната, размеры которой $10 \times 6 \times 3,5 \text{ м}$?
1129. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 дм, 36 дм и 50 дм. Найдите длину ребра куба такого же объема.
1130. Если каждое ребро куба увеличить на 3 см, то его объем увеличится на 513 см^3 . Найдите длину ребра куба.
1131. Длины ребер двух кубов относятся как 1 : 3. Как относятся их объемы? Ответ проиллюстрируйте рисунком.
1132. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна 39 см, а ребра пропорциональны числам 3, 4 и 12.
1133. Ребра прямоугольного параллелепипеда пропорциональны числам 1, 2 и 4. Найдите его объем, если площадь поверхности равна 112 см^2 .

Б

1134. Стороны оснований прямоугольного параллелепипеда равны a и b , а его диагональ наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите объем параллелепипеда.
1135. Объем прямоугольного параллелепипеда 38 дм^3 . Чему равен объем треугольной призмы, которая отсекается от этого параллелепипеда диагональной плоскостью?
1136. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{13}$ м, а диагонали боковых граней наклонены к плоскости основания под углами 30° и 60° . Найдите объем параллелепипеда.
1137. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с боковой гранью угол α , а с плоскостью основания угол β . Найдите объем параллелепипеда.
1138. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна d и образует с боковыми гранями углы α и β .
1139. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если диагонали его граней равны 3 см, 5 см и $\sqrt{22}$ см.



1140. В прямоугольном параллелепипеде диагонали боковых граней, которые выходят из одной вершины, равны 5 см и 8 см и образуют угол 60° . Найдите объем параллелепипеда.
1141. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если $AB = 3$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, а плоскость AB_1C удалена от вершины B на 2,4 см.
1142. Какой наибольший объем может иметь прямоугольный параллелепипед, если стороны его основания пропорциональны числам 5 и 12, а периметр диагонального сечения равен 78 см?
1143. На изготовление закрытого ящика с квадратным дном надо S квадратных метров фанеры. Найдите размеры ящика, при которых его объем будет наибольшим.



- 1144¹. Объем куба равен V . Найдите объем пирамиды, вершина которой – середина диагонали куба, а основание – его грань.
1145. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна 5 см, а сторона основания – 10 см.
- 1146*. Найдите объем пирамиды $PABCD$, высота которой PA равна a , а основание – квадрат $ABCD$ со стороной a .
- 1147*. Найдите объем правильной четырехугольной призмы со стороной основания a , если сумма углов, образованных диагональю призмы со сторонами и с диагональю основания, которые выходят из той же вершины, равна 135° .



Упражнения для повторения

1148. Площади оснований усеченного конуса равны 4 см^2 и 25 см^2 . Через точку, которая делит высоту в отношении $1 : 2$, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите площадь сечения.
1149. Треугольник со сторонами 12 см, 15 см и 17 см вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.
1150. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что $|\overline{CC_1} + \overline{A_1C}| = |\overline{BD_1} - \overline{AA_1}|$.

¹Задачи 1144–1146 решите, не используя формулу объема пирамиды.





ОБЪЕМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ И ЦИЛИНДРА

Теорема 27. Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если основание прямой призмы – прямоугольный треугольник, к ней можно достроить призму, равную ей, так, чтобы образовался прямоугольный параллелепипед (рис. 235). Если объем, площадь основания и высота данной призмы равны V , S , h , то объем, площадь основания и высота образованного параллелепипеда будут $2V$, $2S$ и h . Следовательно, $2V = 2Sh$, отсюда $V = Sh$.

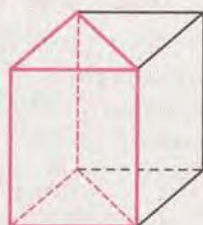


Рис. 235

Рассмотрим произвольную прямую n -угольную ($n > 3$) призму, площадь основания которой S , а высота h . Ее можно разбить (например, диагональными сечениями) на несколько треугольных призм, а каждую треугольную – на две призмы, в основаниях которых – прямоугольные треугольники (рис. 236). Любую прямую призму можно разбить на конечное число k прямых призм, в основаниях которых – прямоугольные треугольники. Высота каждой из этих призм равна h , а сумма площадей их оснований $S_1 + S_2 + \dots + S_k = S$. Объем данной n -угольной призмы равен сумме объемов треугольных призм, составляющих ее. Поэтому $V = S_1h + S_2h + \dots + S_kh = (S_1 + S_2 + \dots + S_k)h = Sh$. Следовательно, объем прямой призмы можно вычислить по формуле $V = Sh$. Теорема доказана.

Теорема 28. Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

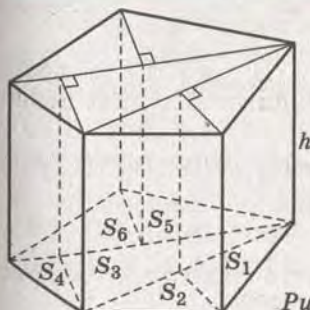


Рис. 236

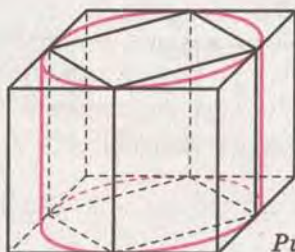


Рис. 237



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан цилиндр с площадью основания S и высотой h . Впишем в него правильную n -угольную призму и опишем вокруг него правильную n -угольную призму (рис. 237). Если площади оснований этих призм S_n и S'_n , то их объемы равны $S_n h$ и $S'_n h$. Поскольку вписанная призма находится в цилиндре, а цилиндр – в описанной призме, то объем V данного цилиндра больше, чем $S_n h$, но меньше, чем $S'_n h$:

$$S_n h < V < S'_n h.$$

При достаточно большом n значения S_n и S'_n незначительно отличаются от S . Следовательно, левая и правая части этого двойного неравенства, а также значение V , которое находится между ними, незначительно отличаются от Sh . Это может быть только тогда, когда $V = Sh$. Теорема доказана.

Следствие. Если радиус цилиндра r , а высота h , то его объем $V = \pi r^2 h$.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какая призма называется прямой?
2. Чему равен объем прямой призмы?
3. Докажите теорему об объеме прямой призмы.
4. Чему равен объем цилиндра?
5. Докажите теорему об объеме цилиндра.
6. Как определить объем цилиндра, если известны радиус его основания r и высота h ?



Выполним вместе

1. Найдите объем прямой призмы, в основании которой лежит ромб со стороной a , если диагонали призмы образуют с плоскостью основания углы α и β .

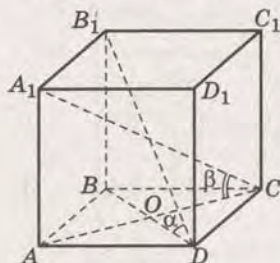


Рис. 238

РЕШЕНИЕ. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямая призма, в которой $ABCD$ – ромб, $AB = a$ и $\angle B_1 D B = \alpha$, $\angle A_1 C A = \beta$ (рис. 238). Найдем ее объем, используя формулу $V = S_o \cdot h$, т. е. $V = S_{ABCD} \cdot BB_1$.

Пусть $BB_1 = h$. Тогда из $\triangle B_1 D B$ ($\angle B = 90^\circ$) $BD = h \operatorname{ctg} \alpha$, а из $\triangle A_1 A C$ ($\angle A = 90^\circ$) $AC = h \operatorname{ctg} \beta$. Поскольку

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD,$$

то $S_{ABCD} = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$, тогда $V = \frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

Выразим h через a . Из $\triangle AOD$ ($\angle O = 90^\circ$) по теореме Пифагора $OD^2 + AO^2 = AD^2$. Поскольку $AO = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} \beta$, $OD = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} \alpha$, то

$$\frac{h^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{h^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \beta = a^2, \text{ или } \frac{h^2}{4} (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta) = a^2,$$

откуда $h^2 = \frac{4a^2}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$, поэтому $h = \frac{2a}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}$.

$$\text{Тогда } V = \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}} \right)^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{4a^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta)^3}}.$$

$$\text{ОТВЕТ. } V = \frac{4a^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta)^3}}.$$

2. В цилиндр, радиус основания которого равен 7 см, под углом к оси вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях оснований. Найдите объем цилиндра, если сторона квадрата равна 10 см.

РЕШЕНИЕ. Пусть $ABCD$ — квадрат, вписанный в цилиндр, $AB = 10$ см, $OB = 7$ см (рис. 239).

Проведем DK перпендикулярно к плоскости основания. Поскольку $AB \perp AD$, то по теореме о трех перпендикулярах $AK \perp AB$, т. е. $\angle BAK = 90^\circ$. Следовательно, BK — диаметр основания цилиндра, $BK = 14$ см.

Из $\triangle BAK$ ($\angle A = 90^\circ$) по теореме Пифагора найдем AK :

$$AK^2 = BK^2 - AB^2, \\ AK^2 = 196 - 100 = 96.$$

Тогда $DK^2 = AD^2 - AK^2$, т. е. $DK^2 = 100 - 96 = 4$. Следовательно, $DK = 2$ см.

Поскольку $V = \pi r^2 h$, то $V = \pi \cdot 49 \cdot 2 = 98\pi$ (см³).

ОТВЕТ. $V = 98\pi$ см³.

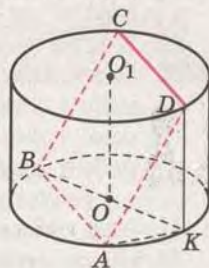


Рис. 239



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



1151. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 5 см. Найдите объем призмы, если ее высота равна 3 см.
1152. Найдите объем цилиндра, радиус основания которого равен 2 см, а высота – 5 см.
1153. Найдите объем правильной треугольной призмы, все ребра которой равны a .
1154. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, большая боковая грань – квадрат. Найдите объем призмы.
1155. Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной a . Найдите объем цилиндра.
1156. Найдите объем цилиндра, в который вписан шар радиуса R .
1157. Найдите объем тела, образованного вращением квадрата со стороной a вокруг прямой, содержащей сторону квадрата.

А

1158. Диагональ грани правильной треугольной призмы равна d и наклонена к стороне основания под углом α . Найдите объем призмы.
1159. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 см^2 , а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 4 см. Найдите объем призмы.
1160. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция с основаниями 6 см и 10 см. Через большее основание трапеции и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания. Найдите объем призмы, если площадь сечения равна 48 см^2 .
1161. Сторона основания прямого параллелепипеда равна a . Через нее и противоположную ей сторону верхнего основания проведено сечение под углом α к плоскости основания. Площадь сечения S . Найдите объем параллелепипеда.
1162. Основание прямого параллелепипеда – ромб. Одна из диагоналей параллелепипеда равна d и наклонена к плоскости основания под углом α , другая – под углом β . Найдите объем.
1163. Найдите объем прямого параллелепипеда, сторона основания которого равна a , а радиус вписанного шара – r .

1164. Вокруг цилиндра описан прямой параллелепипед с острым углом α в основании. Найдите объем параллелепипеда, если высота цилиндра равна h , а радиус — r .
1165. В прямую призму, стороны основания которой равны 13 см, 14 см и 15 см, вписан шар. Найдите объем призмы.
1166. Нужно прорыть канаву длиной 200 м и глубиной 1,5 м. Ширина канавы наверху 3 м, около дна 2 м. Сколько кубометров почвы придется выкопать?
1167. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижним основанием 18 м, верхним 8 м и высотой 3 м. Найдите объем 1 км насыпи.
1168. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите объем цилиндра.
1169. Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат со стороной 1,8 дм. Найдите объем цилиндра.
1170. Найдите отношение объемов цилиндров, вписанного в правильную треугольную призму и описанного вокруг этой призмы.
1171. Площади боковых поверхностей двух цилиндров равны. Докажите, что их объемы относятся как радиусы оснований.
1172. Через образующую цилиндра проведены две плоскости, которые пересекают цилиндр и угол между которыми равен 120° . Найдите объем цилиндра, если его высота равна 5 см, а площади сечений — по 30 см^2 .
1173. Параллельно оси цилиндра на расстоянии d от нее проведено сечение площади S , которое отсекает от окружности основания дугу α . Найдите объем цилиндра.
1174. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, — квадрат, который отсекает от окружности основания радиуса r дугу β . Найдите объем цилиндра.
1175. В цилиндрическую посуду, внутренний диаметр которой 20 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в посуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?
1176. Длины двух круглых колод равны, а их диаметры относятся как 2 : 3. Как относятся их объемы?

Б

1177. Найдите площадь круглого пятна на поверхности моря, образованного 1 м^3 вылитой нефти, если толщина пленки 1 мм.
1178. В цилиндрической посуде уровень жидкости достигает 16 дм. Каким он станет, если жидкость перелить в посуду, диаметр которой в 2 раза больше первого?





1179. Сколько метров стального провода в мотке, если его масса 30 кг, а диаметр провода 6 мм? Плотность стали 7600 кг/м³.
1180. Железобетонная панель имеет размеры 600×120×22 см. По всей ее длине 6 цилиндрических отверстий, диаметры которых 14 см. Найдите массу панели, если плотность материала 2,5 т/м³.
1181. Сколько тонн стальных труб пошло на сооружение газопровода длиной 4450 км, если его внешний диаметр 1420 мм, а толщина трубы 22 мм? Плотность стали 7600 кг/м³.
1182. Сколько квадратных метров бумаги в рулоне, высота которого 85 см, а радиусы 45 см и 2 см? Толщина бумаги 0,1 мм.
1183. Найдите объем двухметрового прута, форма и размеры сечения которого (в мм) изображены на рисунке 240.
1184. Докажите, что произвольная плоскость, проходящая через центр куба, делит его на две части, объемы которых равны.
1185. Стороны оснований прямого параллелепипеда равны m и n и образуют угол 60°. Найдите объем параллелепипеда, если его меньшая диагональ равна большей диагонали основания.
1186. Каждое ребро прямого параллелепипеда равно 1 см, а одна из его диагоналей 2 см. Найдите объем этого параллелепипеда.
1187. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 24 см², а площади боковых граней – 3 см², 4 см² и 5 см². Найдите объем этой призмы.
1188. Найдите объем правильной пятиугольной призмы, каждое ребро которой равно a .
1189. Найдите объем правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, в которой $A_1 E = 12$ м, $A_1 D = 13$ м.
1190. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем призмы, если расстояние от вершины A до этой плоскости равно d .
1191. Высота пирамиды равна 8 м, а площадь основания – 12 м². Найдите объем призмы, одно основание которой принадлежит основанию пирамиды, а другое – сечению пирамиды плоскостью, проведенной на расстояние 2 м от вершины.
1192. Через боковое ребро правильной шестиугольной призмы проведено сечение, которое делит призму на части,

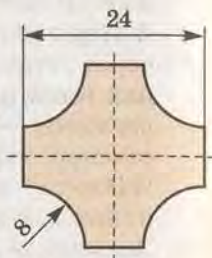


Рис. 240

объемы которых относятся как $1 : 5$. Найдите площадь сечения, если площадь боковой грани призмы равна S .

В

1193. Докажите, что плоскость, которая пересекает боковую поверхность правильной $2n$ -угольной призмы, но не пересекает ее оснований, делит ее боковую поверхность и объем в одном и том же отношении.

1194. Найдите объемы частей цилиндра, изображенных на рисунке 241.

1195. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол α . Найдите объем цилиндра, описанного вокруг данной призмы, если площадь сечения равна Q .

1196. Высота цилиндра h . Четыре точки, лежащие на окружностях его оснований, – вершины квадрата со стороной a . Найдите объем цилиндра.

1197. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу 60° . Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила цилиндр.

- 1198*. Из всех цилиндров данного объема найдите цилиндр, площадь поверхности которого наименьшая. Найдите отношение его высоты к радиусу.

- 1199*. Из всех цилиндров, вписанных в сферу радиуса r , найдите цилиндр наибольшего объема. Чему равен его объем?

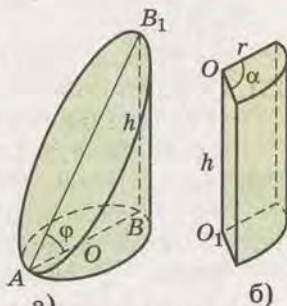


Рис. 241

Упражнения для повторения

1200. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда равны 10 см и 17 см, а их площади пропорциональны числам 2 и 5. Найдите объем параллелепипеда.
1201. Прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат со стороной a , вписан в сферу радиуса R . Найдите его объем.
1202. Равнобедренный треугольник с основанием 6 см и углом при вершине 120° вращается вокруг прямой, содержащей основание. Найдите площадь поверхности тела вращения.



ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА

Пусть тело T находится между двумя опорными параллельными плоскостями α и β (рис. 242). Введем систему координат так, чтобы ось x была перпендикулярной к этим плоскостям. Абсциссы точек пересечения плоскостей α и β с осью x обозначим через a и b ($a < b$). Плоскости α и β не пересекают тело T , а только касаются его. Но договоримся и их считать секущими плоскостями (вырожденными). Получается, что каждая плоскость, которая перпендикулярна к оси x и проходит через точку x ее отрезка $[a; b]$, пересекает тело T . Пусть

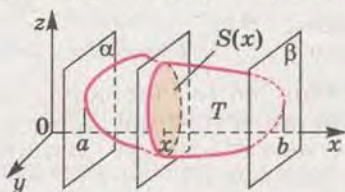


Рис. 242

$S(x)$ – площадь соответствующего сечения. Поскольку каждому значению x из $[a; b]$ соответствует единственное значение площади $S(x)$, то $S(x)$ – функция, заданная на $[a; b]$. Если эта функция непрерывная, то объем данного тела T можно выразить через $S(x)$, a и b .

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Проведенные через эти точки плоскости, перпендикулярные к оси x , рассекают данное тело на n слоев толщиной $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (рис. 243). Объем i -го слоя приблизительно равен $S(x_i)\Delta x$, а объем всего тела

$$V \approx S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + \dots + S(x_n)\Delta x. \quad (*)$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем тоньше слой, т. е. чем больше n . Можно доказать, что когда $n \rightarrow \infty$, то интегральная сумма правой части приближенного равенства (*) стремится к объему V данного тела. Следовательно, по определению интеграла:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть данное тело – произвольный цилиндр (в широком понимании), площадь основания которого S , а высота h (рис. 244). Расположим систему координат так, чтобы одно основание цилиндра было в плоскости yz , а плоскость второго основания пересекала ось x в

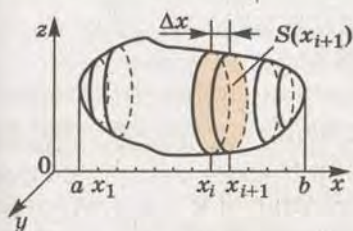


Рис. 243

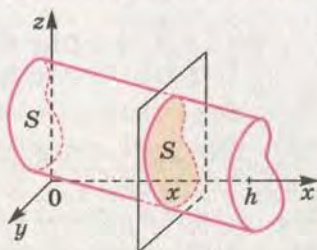


Рис. 244

точке h . Каждая секущая плоскость, перпендикулярная к оси x , пересекает данный цилиндр по фигуре, равной основанию; площадь каждого такого сечения равна S . Поэтому объем данного цилиндра:
$$V = \int_0^h S dx = Sx \Big|_0^h = Sh.$$

Следовательно, объем любого цилиндра (в широком понимании) равен произведению площади его основания на высоту.

Следствия. Объем наклонной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Объем кругового цилиндра, у которого радиус основания r и высота h , можно вычислять по формуле $V = \pi r^2 h$.

Если плоскость, перпендикулярная к боковому ребру, пересекает все боковые ребра призмы, то сечение призмы такой плоскостью называют *перпендикулярным сечением*. Если многогранник M , отрезанный от наклонной призмы ее перпендикулярным сечением, перенести параллельно в положение M_1 , образуется прямая призма такого же объема (рис. 245). Следовательно, правильно такое утверждение: объем наклонной призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения и бокового ребра.

Аналогичное утверждение правильно и для произвольного (в широком понимании) цилиндра (рис. 246). Всегда $Sh = Ql$.

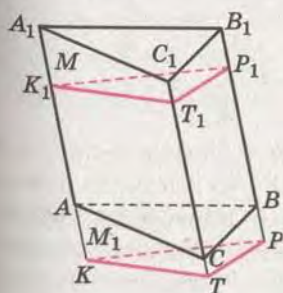


Рис. 245

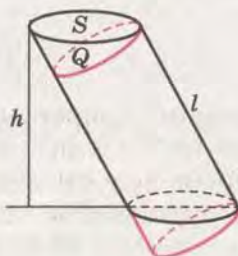


Рис. 246



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как с помощью интеграла можно найти объем тела?
2. Выведите формулу для нахождения объема тела через интеграл.
3. Какая плоскость называется опорной?
4. Чему равен объем наклонной призмы?
5. Как найти объем наклонной призмы через площадь перпендикулярного сечения?
6. Чему равен объем цилиндра?



Выполним вместе

1. Основанием призмы является правильный треугольник ABC со стороной a . Вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания, а ребро AA_1 образует с плоскостью основания угол α . Найдите объем призмы. Вычислите, если $a = 25,3$ см, $\alpha = 68^\circ 12'$.

РЕШЕНИЕ. Задаче удовлетворяет призма $ABCA_1B_1C_1$, изображенная на рисунке 247. A_1O — ее высота, $\angle A_1AO = \alpha$.

Если O — центр правильного $\triangle ABC$, сторона которого $AB = a$, то его пло-

щадь $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, а радиус описанной

окружности $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из прямо-

угольного треугольника A_1OA находим:

$$A_1O = AO \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Тогда объем призмы: } V = Sh = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^3}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Если } a = 25,3 \text{ и } \alpha = 68^\circ 12', \text{ то } V = \frac{25,3^3}{4} \operatorname{tg} 68^\circ 12' \approx 10119.$$

$$\text{ОТВЕТ. } V = \frac{a^3}{4} \operatorname{tg} \alpha, V \approx 10 \text{ дм}^3.$$

2. В наклонной треугольной призме расстояние от бокового ребра до диагонали противоположной боковой грани равно d , а площадь этой грани — Q . Найдите объем призмы.

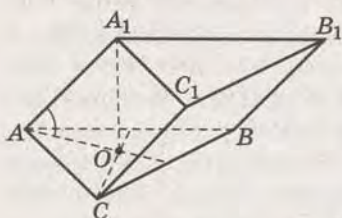


Рис. 247

РЕШЕНИЕ. Расстояние от бокового ребра BB_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ до диагонали A_1C грани AA_1C_1C равно расстоянию от ребра BB_1 до грани AA_1C_1C (рис. 248).

Достроим к данной призме $ABCA_1B_1C_1$ еще одну треугольную призму, чтобы образовался параллелепипед $ADBCA_1D_1B_1C_1$ (рис. 248). Достроенная призма имеет такой же объем, как и данная, поскольку у них равны основания и высоты. Объем параллелепипеда равен Qd . Объем данной призмы в 2 раза меньше.

ОТВЕТ. $V = \frac{1}{2} Qd$.

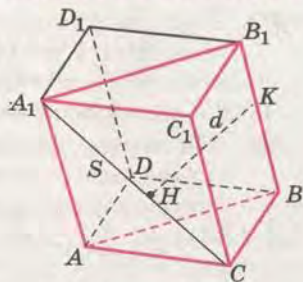


Рис. 248

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно

1203. Найдите объем призмы, если площадь ее основания равна 10 м^2 , а высота — 3 м.
1204. Найдите высоту наклонной призмы, объем которой равен 12 см^3 , а в основании лежит квадрат со стороной 2 см.
1205. Основание призмы — прямоугольник со сторонами a и b . Боковое ребро призмы равно c и образует с плоскостью основания угол α . Найдите объем призмы.
1206. В основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной 3 см. Боковое ребро равно 6 см и образует с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем параллелепипеда.
1207. Найдите объем наклонной призмы, у которой площадь перпендикулярного сечения равна 9 м^2 , а боковое ребро 5 м.
1208. Основание наклонной призмы — квадрат. Верно ли, что произвольная плоскость, которая проходит через центры оснований, делит призму на две части равных объемов?
1209. Найдите объем наклонного кругового цилиндра, у которого радиус основания равен 2 см, а образующая — 10 см и наклонена к плоскости основания под углом 30° .

А

1210. Площадь основания призмы Q , боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите объем призмы.



1211. Стороны основания параллелепипеда равны 6 дм и 8 дм, угол между ними 45° . Боковое ребро равно 7 дм и наклонено к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем параллелепипеда.
1212. Две грани параллелепипеда – квадраты со стороной a , остальные – ромбы с углами по 60° . Найдите объем параллелепипеда.
1213. Основание параллелепипеда – ромб со стороной 4 см и углом 60° . Найдите объем параллелепипеда, если большая диагональ равна 10 см и образует с плоскостью основания угол 60° .
1214. Найдите объем параллелепипеда, основание которого ромб со стороной 6 см и углом 60° , а боковые грани – ромбы с углом 45° .
1215. Найдите объем параллелепипеда, если все его грани – ромбы со стороной a и углом 60° .
1216. Постройте сечение наклонного параллелепипеда плоскостью, которая проходит через середины двух смежных ребер основания параллельно боковому ребру. Найдите отношение объемов полученных призм.
1217. Основанием призмы является правильный треугольник со стороной a . Одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и является ромбом с острым углом α . Найдите объем призмы. Вычислите, если $a = 17$ см, $\alpha = 65^\circ$.
1218. Основанием призмы является равносторонний треугольник со стороной a . Одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна b . Найдите объем призмы.
1219. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней Q , а расстояние от противоположного ребра к плоскости этой грани m . Найдите объем призмы.

Б

1220. Основание наклонной призмы – равнобедренная трапеция, стороны которой 44 см, 17 см, 28 см и 17 см. Одно из диагональных сечений призмы перпендикулярно к основанию и является ромбом с углом 45° . Найдите объем призмы.
1221. Найдите объем наклонного кругового цилиндра, если радиус его основания 12 см, а образующая равна 23 см и наклонена к плоскости основания под углом 72° .
1222. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны по 8 см, а расстояния между ними – 13 см, 14 см и 15 см. Найдите объем призмы.
1223. Площади двух боковых граней наклонного параллелепипеда равны 21 см^2 и 49 см^2 , а угол между ними 60° .



- Найдите объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно 7 см.
1224. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро равно 10 см и отдалено от двух других ребер на 5 см и 12 см. Найдите объем призмы.
1225. Основание призмы – правильный треугольник со стороной a . Все боковые грани – ромбы. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем призмы.
1226. Основанием параллелепипеда является параллелограмм со сторонами 6 см, 14 см и меньшей диагональю 12 см. Большее диагональное сечение перпендикулярно к плоскости основания и его площадь равна 80 см^2 . Найдите объем параллелепипеда.
1227. У наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AC = 10 \text{ см}$, $B_1 D_1 = 8 \text{ см}$, угол между ними равен 30° , а расстояние – 5 см. Найдите его объем.
1228. Длины трех ребер параллелепипеда, которые выходят из одной вершины, равны a , b и c . Ребра a и b перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α . Найдите объем параллелепипеда.
1229. Постройте сечение наклонного параллелепипеда плоскостью, которая проходит через данную точку стороны основания и делит этот параллелепипед на две призмы равных объемов.
1230. Постройте сечение треугольной призмы плоскостью, которая проходит через боковое ребро и рассекает ее на две части, объемы которых относятся как 1 : 2.

В

1231. В наклонной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ $AC = 8 \text{ см}$, $BB_1 = 6 \text{ см}$, угол между AC и BB_1 равен 60° , а расстояние от BB_1 до грани $AA_1 C_1 C$ равно 5 см. Найдите объем призмы.
1232. Докажите, что из всех призм, имеющих одно и то же основание и боковое ребро, наибольший объем имеет прямая призма.
1233. Найдите объем наклонного цилиндра, если его образующая равна l , а секущая плоскость, перпендикулярная к образующим, пересекает его по кругу радиуса r .
- 1234*. Пользуясь формулой объема наклонной призмы, докажите теорему о площади проекции многоугольника на плоскость.
- 1235*. Пользуясь формулой объема цилиндра, выведите формулу для вычисления площади эллипса.



Упражнения для повторения

1236. Плоскость, параллельная оси цилиндра, удалена от нее на 15 см. Диагональ образованного сечения равна 20 см. Найдите объем цилиндра, если радиус его основания равен 17 см.
1237. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), у которого $AC = a$, $\angle BAC = \alpha$, а диагональ B_1C образует с плоскостью AA_1B_1 угол φ . Найдите объем призмы.
1238. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением ромба с диагоналями 6 см и 8 см вокруг прямой, содержащей сторону ромба.



§ 32

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ И УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

Выведем формулы для вычисления объемов пирамиды и усеченной пирамиды.



Теорема 29. *Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана пирамида, площадь основания которой S , а высота h . Возьмем ее вершину за начало координат, а ось x направим перпендикулярно к плоскости основания (рис. 249). Каждая секущая плоскость, перпендикулярная к оси x , пересекает пирамиду по многоугольнику, подобному основанию. Если секущая плоскость удалена от начала координат на x , то по теореме 15 соответствующая площадь сечения $S(x)$ удовлетворяет условию

$$S(x) : S = x^2 : h^2.$$

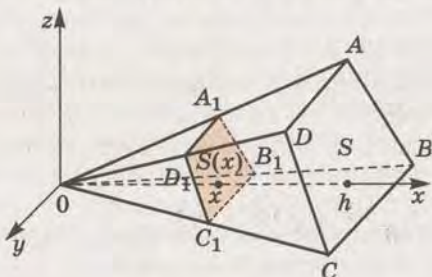


Рис. 249

Отсюда $S(x) = \frac{S}{h^2} x^2$.

Эта функция квадратична, поэтому и непрерывна на $[0; h]$. Следовательно, объем данной пирамиды:

$$V = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} Sh,$$

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

Теорема доказана.

Теорема 30. Объем усеченной пирамиды, площади оснований и высота которой равны соответственно S , S_1 и h , можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} h(S + \sqrt{SS_1} + S_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если P — вершина пирамиды, частью которой является данная усеченная пирамидка, то объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух пирамид (рис. 250). Площади S и S_1 их оснований относятся как квадраты расстояний от соответствующих плоскостей до вершины P . Поэтому, если $PO_1 = x$, то

$$\frac{S}{S_1} = \frac{(x+h)^2}{x^2},$$

откуда

$$x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}.$$

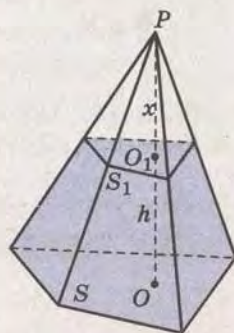


Рис. 250

Следовательно, объем данной усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} (x+h) \cdot S - \frac{1}{3} x S_1 = \frac{1}{3} (hS + x(S - S_1)) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(hS + \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}} \cdot (S - S_1) \right) = \frac{1}{3} h(S + \sqrt{SS_1} + S_1).$$

Т. е.

$$V = \frac{1}{3} h(S + \sqrt{SS_1} + S_1).$$

Теорема доказана.



Как относятся объемы подобных пирамид? Если коэффициент подобия k , то отношение их высот равно k , отношение площадей оснований — k^2 , отношение объемов подобных пирамид равно k^3 . Следовательно, объемы подобных пирамид относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

Подобные многогранники можно разбить на попарно подобные треугольные пирамиды. Поэтому и *объемы подобных многогранников относятся как кубы их соответствующих линейных размеров*. Можно доказать, что и объемы любых подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как найти объем пирамиды?
2. Выведите формулу для нахождения объема пирамиды.
3. Чему равен объем усеченной пирамиды?
4. Выведите формулу для нахождения объема усеченной пирамиды.
5. Как относятся объемы подобных многогранников?
6. Как относятся объемы подобных тел?



Выполним вместе

1. Найдите объем треугольной пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра a , а плоские углы при вершине 60° , 90° и 90° (рис. 251).

РЕШЕНИЕ. Возьмем за основание пирамиды ее грань, которая является равносторонним треугольником. Его площадь $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, а высота пирамиды a . Поэтому объем дан-

ной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot a^3.$$

ОТВЕТ. $V = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot a^3.$

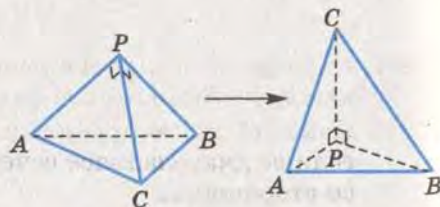


Рис. 251

2. Докажите, что если многогранник, описанный вокруг шара радиуса r , имеет площадь поверхности S , то его объем

$$V = \frac{1}{3}Sr.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соединив центр шара с каждой вершиной описанного n -гранника, получим n пирамид. Высота каждой равна радиусу шара r , а площадь основания – площади соответствующей грани многогранника. Если $S_1, S_2, \dots, S_n$ – площади граней описанного многогранника, то

$$V = \frac{1}{3}S_1r + \frac{1}{3}S_2r + \dots + \frac{1}{3}S_nr = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \dots + S_n)r = \frac{1}{3}Sr.$$



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



1239. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 4 см, а высота – 3 см.
1240. Найдите объем треугольной пирамиды, в основе которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, а гипотенуза равна высоте пирамиды.
1241. Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит ромб с диагоналями a и b , если высота пирамиды равна h .
1242. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 8 см^3 , а высота – 6 см. Чему равна сторона основания?
1243. Найдите объем треугольной пирамиды, у которой боковые ребра взаимно перпендикулярны и каждое из них равно a .
1244. Объем куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен V (рис. 252). Найдите объем пирамиды: а) $A_1 ABD$; б) $A_1 C_1 BD$.
1245. Через середину высоты пирамиды проведена секущая плоскость, параллельная основанию. Как относятся объемы образованных частей пирамиды?
1246. Площади поверхностей двух подобных пирамид относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?

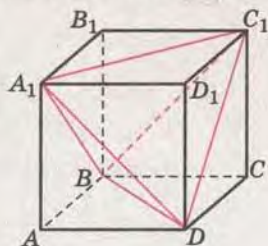


Рис. 252

А

1247. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно 1 дм.
1248. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональное сечение – правильный треугольник со стороной a .



1249. Найдите объем пирамиды Хеопса, площадь основания которой 5,3 га, а высота 147 м.
1250. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно b , а плоский угол при вершине 90° .
1251. Найдите объем треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны a , b , c , а углы между ними прямые.
1252. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно b и:
- а) наклонено к плоскости основания под углом α ;
 - б) образует угол β с высотой пирамиды;
 - в) наклонено к стороне основания под углом γ .
1253. Диагональное сечение правильной шестиугольной пирамиды делит ее на две неравные части. Как относятся их объемы?
1254. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной a . Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при ребрах ее основания 90° , 45° и 45° .
1255. Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого равно a .
1256. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Двугранные углы при каждом ребре основания равны по 45° . Найдите объем этой пирамиды.
1257. Основание пирамиды – равнобедренная трапеция со сторонами 4 см, 7 см, 7 см и 10 см, все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем этой пирамиды.
1258. По боковому ребру b и плоскому углу 2α при вершине найдите объем правильной пирамиды:
- а) треугольной;
 - б) шестиугольной;
 - в) n -угольной.
1259. Стороны основания треугольной пирамиды равны 6 см, 25 см и 29 см, а ее объем – 80 см^3 . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если все двугранные углы при ее основании равны между собой.
- Б**
1260. Найдите объем треугольной пирамиды, если одна из сторон основания равна 10 м, противоположное ей боковое ребро 16 м, а все другие ребра имеют длину 13 м.
1261. Найдите объем правильного октаэдра, если его ребро равно a .
1262. Через середины каждых трех ребер куба, которые выходят из одной вершины, проведено сечение. Найдите объем образованного 14-гранника, если ребро куба равно a .



1263. Плоскость, параллельная основанию, делит пирамиду на два многогранника равных объемов. В каком отношении эта плоскость делит высоту пирамиды?
1264. **ЗАДАЧА ДЛЯ СООБРАЗИТЕЛЬНЫХ.** Вы тратите мыло равномерно. Через семь дней все размеры куска мыла уменьшились в 2 раза. На сколько дней вам еще хватит этого мыла?
1265. Дно котлована – прямоугольник со сторонами 12 м и 24 м, его глубина 4 м. Найдите объем котлована, если его двугранные углы при основании по 120° . Можно ли объем такого многогранника вычислить по формуле объема усеченной пирамиды?
1266. Найдите объем усеченной пирамиды, основания которой – квадраты со сторонами 2 см и 5 см, одна из боковых граней – равнобедренная трапеция, перпендикулярная к плоскости основания, а противоположная грань образует с основанием угол 45° .
1267. Плоскости, параллельные основанию пирамиды объема V , делят ее высоту на три равные части. Определите объем усеченной пирамиды, ограниченной этими плоскостями.
1268. Найдите объем усеченной пирамиды, площади оснований которой равны 12 см^2 и 75 см^2 , а высота полной пирамиды – 15 см.
1269. Одно ребро треугольной пирамиды равно b , а каждое из остальных – a . Найдите объем пирамиды.
1270. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный $\triangle ABC$, у которого $AB = BC$ и $\angle ABC = \alpha$. Грань ASC перпендикулярна к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами φ . Найдите объем пирамиды, если расстояние от основания высоты до боковой грани ASB равно l .
1271. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим углом α . Боковая грань, которая проходит через гипотенузу треугольника, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45° . Найдите объем пирамиды.
1272. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a , а угол между смежными боковыми гранями α .
1273. Углы правильного тетраэдра с ребрами a срезали так, что получился многогранник, у которого четыре грани – правильные треугольники и четыре грани – правильные шестиугольники. Найдите объем образованного многогранника.
1274. Найдите объем тетраэдра, вершины которого – точки $P(1; 2; 6)$, $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$.



1275. Найдите объем чердака с размерами, указанными на рисунке 253.
1276. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a . При какой высоте ее объем будет наибольшим?

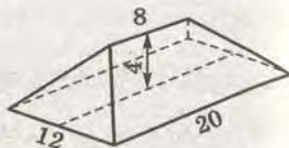


Рис. 253

1277. Боковое ребро правильной n -угольной пирамиды равно a . Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды.
1278. Вычислите объем общей части двух пирамид с одинаковой высотой h , если общим их основанием является квадрат со стороной a , а высоты проходят через противоположные вершины квадрата основания.
1279. Найдите объем тетраэдра $ABCD$, если $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$.
1280. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Через ребро AB и середину SD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
1281. В правильную четырехугольную пирамиду, двугранный угол при основании которой равен α , вписан шар радиуса r . Найдите объем пирамиды, вершина которой лежит в центре шара, а вершины основания – в точках касания шара к боковым граням данной пирамиды.
1282. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. К шару, параллельно основанию пирамиды, проведена касательная плоскость, которая делит объем пирамиды в отношении $a : b$, считая от вершины. Найдите угол между высотой пирамиды и ее боковой гранью.
1283. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды к боковому ребру и боковой грани проведены перпендикуляры длиной m и n соответственно. Найдите объем пирамиды.
1284. Найдите объем усеченной треугольной пирамиды, основаниями которой являются правильные треугольники со сторонами 2 м и 6 м, если одна боковая грань перпендикулярна к плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания угол 30° .
1285. Куб объема V составлен из шести равных четырехугольных пирамид. Найдите площадь поверхности такой пирамиды.
- 1286*. Найдите объем правильной треугольной усеченной пирамиды, если известны длина l средней линии боковой грани и расстояние d между центрами вписанного и описанного шаров.

Упражнения для повторения

1287. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а боковая поверхность – 32 см^2 . Найдите объем призмы.
1288. Основанием наклонного параллелепипеда является ромб $ABCD$ со стороной 4 см и углом 60° . Ребро CC_1 также равно 4 см и образует с ребрами CB и CD углы 45° . Найдите объем параллелепипеда.
1289. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, проведенная через середину ребра AA_1 и ребро BC , перпендикулярна к плоскости AB_1C_1 . Найдите объем призмы, если $AB = a$.



ОБЪЕМ КОНУСА И УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Если в формулировках и доказательствах теорем 29 и 30 заменить слова «пирамида» на «конус», а «усеченная пирамида» на «усеченный конус», получим теоремы об объемах конуса и усеченного конуса (рис. 254, 255).

Теорема 31. Объем конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.

Теорема 32. Объем усеченного конуса, площади оснований которого S и S_1 , а высота h , можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS_1} + S_1).$$

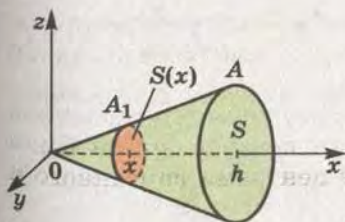


Рис. 254

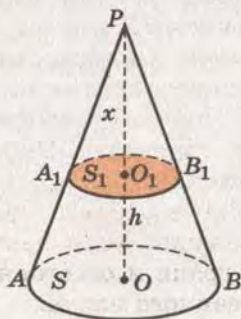


Рис. 255



Основания конуса и усеченного конуса – круги, а площадь круга радиуса r равна πr^2 . Поэтому объем конуса можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

где h – его высота, а r – радиус основания.

Если h – высота усеченного конуса, а r и r_1 – радиусы оснований, то его объем

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rr_1 + r_1^2).$$



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Чему равен объем конуса?
2. Чему равен объем усеченного конуса?
3. Чему равна площадь круга радиуса r ?
4. Как найти объем конуса, зная радиус его основания и высоту?



Выполним вместе

1. Конус и цилиндр имеют равные радиусы и высоты. Как относятся их объемы?

РЕШЕНИЕ. $V_k : V_{\text{ц}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h : \pi r^2 h = 1 : 3.$

ОТВЕТ. 1 : 3.

2. Найдите объем конуса, образующую которого l видно из середины высоты конуса под углом α .

РЕШЕНИЕ. Пусть $PA = l$ – образующая конуса, PO – его высота, M – середина высоты и $\angle PMA = \alpha$ (рис. 256). Обозначим $OA = x$. Тогда из прямоугольного $\triangle AMO$ найдем: $MO = x \operatorname{ctg} \angle AMO = x \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -x \operatorname{ctg} \alpha$. $PO = 2 \cdot MO = -2x \operatorname{ctg} \alpha$. Из $\triangle POA$ по теореме Пифагора имеем:

$$x^2 + (-2x \operatorname{ctg} \alpha)^2 = l^2, \quad x = \frac{l}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

Это радиус основания конуса. Найдем его высоту:

$$h = -2x \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2l \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

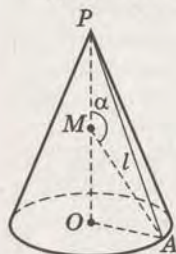


Рис. 256

Следовательно, объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{l}{\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2 \alpha}} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2l\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2 \alpha}} \right) = -\frac{2\pi l^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3\sqrt{(1+4\operatorname{ctg}^2 \alpha)^3}}.$$

Тут $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, ведь $\angle AMO$ острый.

ОТВЕТ. $V = -\frac{2\pi l^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3\sqrt{(1+4\operatorname{ctg}^2 \alpha)^3}}$, где $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Найдите объем тела, образованного вращением прямоугольного треугольника с гипотенузой c и острым углом α вокруг прямой, которая проходит через вершину прямого угла параллельно гипотенузе.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\triangle ABC$, у которого $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$ и $\angle BAC = \alpha$, вращается вокруг прямой l (рис. 257).

В результате образуется цилиндр, из которого вырезаны два конуса с высотами CO и CO_1 . Чтобы найти объем образованного тела, надо из объема цилиндра вычесть объемы конусов, т. е.

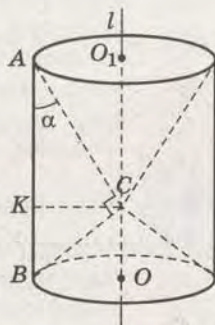


Рис. 257

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot KC^2 \cdot OO_1 - \left(\frac{1}{3} \pi \cdot KC^2 \cdot CO + \frac{1}{3} \pi \cdot KC^2 \cdot CO_1 \right) = \\ &= \pi \cdot KC^2 \cdot OO_1 - \frac{1}{3} \pi \cdot KC^2 (CO + CO_1) = \\ &= \pi \cdot KC^2 \cdot OO_1 - \frac{1}{3} \pi \cdot KC^2 \cdot OO_1 = \frac{2}{3} \pi \cdot KC^2 \cdot OO_1. \end{aligned}$$

Найдем KC из $\triangle ABC$, используя метод площадей:

$$KC = \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

Поскольку $AC = c \cos \alpha$, $BC = c \sin \alpha$, то

$$KC = \frac{c \cos \alpha \cdot c \sin \alpha}{c} = c \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} c \sin 2\alpha.$$

Тогда $V = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{1}{4} c^2 \sin^2 2\alpha \cdot c = \frac{1}{6} \pi c^3 \sin^2 2\alpha.$

ОТВЕТ. $V = \frac{1}{6} \pi c^3 \sin^2 2\alpha.$



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



1290. Найдите объем конуса, высота которого равна 3 см, а радиус основания 1 см.
1291. Найдите объем конуса, высота которого равна 2 м, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 45° .
1292. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник с катетом $3\sqrt{2}$ см. Найдите объем конуса.
1293. Найдите объем тела, образованного вращением прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 5 см вокруг большего из катетов.
1294. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите отношение объема усеченного конуса к объему всего конуса.

А

1295. Найдите объем конуса, если его образующая равна l и наклонена к плоскости основания под углом α .
1296. Свинцовый конус, высота которого 18 см, переплавили в цилиндр с таким же основанием. Найдите высоту цилиндра.
1297. Куча щебня имеет форму конуса, образующая которого 4 м. Найдите ее объем, если угол естественного уклона (угол наклона образующей к плоскости основания) для щебня 30° .
1298. Есть два конуса одинакового зерна, один в 2 раза выше второго. Во сколько раз в первом конусе больше зерна, чем во втором?
1299. Докажите, что объемы двух подобных конусов относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.
1300. Найдите объем конуса, развертка боковой поверхности которого – полукруг радиуса 12 см.
1301. Докажите, что объем конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в 4 раза меньше объема конуса, описанного вокруг этой пирамиды.
1302. Определите объем конуса, если в его основании хорда m стягивает дугу φ , а угол между образующей и высотой равен α .
1303. Найдите площадь поверхности конуса, высота и объем которого равны h и V .
1304. Из центра основания конуса до образующей проведен перпендикуляр длиной d . Найдите объем конуса, если этот перпендикуляр образует с плоскостью основания угол α .



1305. Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник. Найдите объем конуса, если площадь его поверхности равна $12\pi \text{ см}^2$.
1306. Найдите объем конуса, если радиус вписанного шара равен r , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α .
1307. В шар радиуса $2r$ вписан конус, радиус основания которого r . Найдите объем конуса.
1308. В сферу радиуса r вписан конус, образующая которого с высотой образует угол α . Найдите объем конуса.
1309. Радиусы оснований усеченного конуса 10 см и 16 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем этого усеченного конуса.
1310. Объем усеченного конуса, радиусы оснований которого 4 см и 22 см, равен объему цилиндра такой же высоты. Найдите радиус цилиндра.
1311. Через точки, которые делят высоту усеченного конуса на три равные части, проведены плоскости, параллельные основаниям. Найдите объемы образованных частей данного усеченного конуса, если его высота равна 18 см, а радиусы оснований 5 см и 11 см.
1312. Найдите объем тела, образованного при вращении ромба со стороной 6 см и углом 60° вокруг прямой, проведенной через вершину тупого угла перпендикулярно к меньшей диагонали.

Б

1313. Через две образующие конуса проведена плоскость, которая образует с плоскостью основания угол α и пересекает основание конуса по хорде, которую видно из центра основания под углом β . Найдите объем конуса, если его образующая равна l .
1314. Через две образующие конуса, угол между которыми α , проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Найдите объем конуса, если площадь сечения равна Q .
1315. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Найдите отношение объемов полученных частей конуса.
1316. Два конуса имеют концентрические основания и общую высоту h . Разность углов, образованных образующими с осью, равна β , угол наклона образующей внутреннего конуса к плоскости его основания равен α . Найдите объем части пространства, находящейся между поверхностями конусов.



1317. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 16 см, а боковое ребро – 10 см. Вокруг боковой грани описана окружность, являющаяся основанием конуса, образующая которого принадлежит прямой, содержащей боковое ребро пирамиды. Найдите объем конуса.
1318. Найдите объем конуса, если радиус вписанного в него шара равен r , а угол, под которым из центра шара видна образующая, равен α .
1319. Периметр осевого сечения конуса равен 10 дм. Каким должен быть диаметр основания, чтобы объем конуса был наибольшим?
1320. Найдите отношение высоты конуса к диаметру, если при заданной площади боковой поверхности он имеет наибольший объем.
1321. Найдите наименьший объем конуса, описанного вокруг шара радиуса r .



1322. Боковая поверхность конуса касается вписанного шара по параллели 60° . Найдите объем конуса, если радиус шара равен 2.
1323. Найдите зависимость между радиусом шара r , площадью поверхности S и объемом V описанного усеченного конуса.
1324. Найдите объем усеченного конуса, в который вписан шар радиуса r , если из центра шара диаметр большего основания виден под углом α .
1325. Найдите объем усеченного конуса, у которого диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая равна l и наклонена к плоскости большего основания под углом α .
1326. Найдите объем тела, образованного вращением ромба со стороной a и острым углом α вокруг прямой, которая проходит через вершину острого угла ромба перпендикулярно к его стороне.
- 1327*. В конус вписан шар радиуса r . Найдите объем конуса, если известно, что плоскость, которая касается шара и перпендикулярна к одной из образующих конуса, отдалена от вершины конуса на расстояние d .
- 1328*. Вершина конуса совпадает с вершиной куба. Основание конуса касается трех противолежащих граней куба. Осевое сечение конуса – правильный треугольник. Найдите отношение объема конуса к объему куба.



Упражнения для повторения

1329. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна m , а угол между смежными боковыми гранями равен φ . Найдите объем пирамиды.
1330. В конус вписан цилиндр, диагонали осевого сечения которого параллельны образующим конуса. Образующая конуса равна l и образует с плоскостью основания конуса угол α . Найдите объем цилиндра. Вычислите, если $l = 27$ см, $\alpha = 70^\circ$.
1331. Найдите расстояние от центра сферы к плоскости ромба, все стороны которого касаются этой сферы, если радиус сферы 10 см, сторона ромба $8\sqrt{3}$ см, а острый угол 60° .



§ 34

ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Сначала выведем формулу для вычисления объема тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания.

Представим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $z = f(x)$, осью x , прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 258). Если эту криволинейную трапецию вращать вокруг оси x , получим некоторое тело вращения. Каждая плоскость, которая перпендикулярна к оси x и пересекает ее в точке $x \in [a; b]$, пересекает данное тело по кругу радиуса $f(x)$. Площадь сечения $S(x) = \pi f^2(x)$.

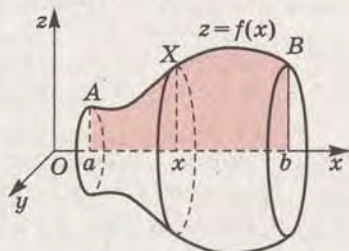


Рис. 258

Если функция $f(x)$ непрерывна, то непрерывна и функция $S(x)$. Следовательно, объем данного тела

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

На основе этой общей формулы докажем теорему об объеме шара.

Теорема 33. Объем шара радиуса r равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шар радиуса r можно получить вращением вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной

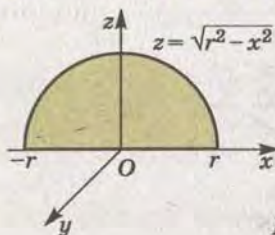


Рис. 259

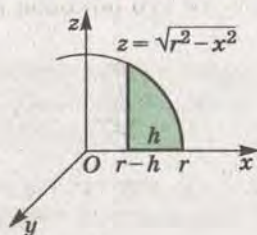


Рис. 260

этой осью и графиком функции $z = \sqrt{r^2 - x^2}$ (рис. 259). Следовательно, объем такого шара

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Повторим некоторые сведения о частях шара. Часть шара, отсекаемая плоскостью, называется *шаровым сегментом*. Его поверхность состоит из *сферического сегмента* и круга – основания сферического сегмента. Расстояние от основания шарового сегмента до параллельной ему плоскости, касательной к сегменту, называют *высотой* сферического сегмента.

Формулу для вычисления объема шарового сегмента радиуса r и высоты h можно найти так (рис. 260):

$$V_{\text{сегм}} = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

Тело, образованное вращением кругового сектора вокруг радиуса, ограничивающего его, называется *шаровым сектором*. На рисунке 215 изображены два шаровых сектора: выпуклый и невыпуклый. Чтобы найти объем выпуклого шарового сектора, надо к объему шарового сегмента прибавить объем соответствующего конуса

$$V_{\text{сект}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) + \frac{\pi}{3} (r-h)(r^2 - (r-h)^2) = \frac{2}{3} \pi r^2 h.$$

Чтобы найти объем невыпуклого шарового сектора, надо из объема сферического сегмента вычесть объем соответствующего конуса. Результат в обоих случаях будет одинаковым (убедитесь в этом самостоятельно).

Если надо найти объем шарового слоя, то можно из объема шара вычесть объемы двух сегментов.

Следовательно, вычислить объем шара, шарового сегмента, шарового сектора можно по формулам:

$$V_{\text{к}} = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right), \quad V_{\text{сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как найти объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания?
2. Докажите формулу для нахождения объема шара.
3. Сформулируйте определение шарового сегмента.
4. Как найти объем шарового сегмента?
5. Сформулируйте определение шарового сектора.
6. Как найти объем шарового сектора?
7. Сформулируйте определение шарового слоя. Как найти его объем?



Выполним вместе

1. Найдите объем шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой a , а двугранный угол при ребре основания α .

РЕШЕНИЕ. Центр O_1 шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на ее высоте PO (рис. 261). Шар касается боковой грани PAB в некоторой точке K , принадлежащей апофеме PM .

$$OM = \frac{1}{2} OC = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\triangle O_1 OM = \triangle O_1 KM, \quad \text{поэтому}$$

$$\angle O_1 MO = \frac{1}{2} \angle PMO = \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного $\triangle O_1 OM$ найдем:

$$OO_1 = OM \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, объем шара

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot OO_1^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6} a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54} \pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

ОТВЕТ. $V = \frac{\sqrt{3}}{54} \pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

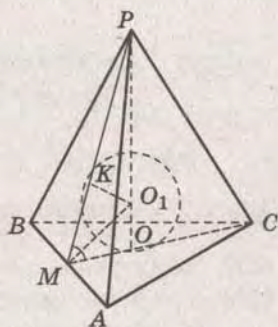


Рис. 261



2. Круговой сектор с углом α и радиусом r вращается вокруг радиуса, ограничивающего его. Докажите, что объем образованного тела равен $\frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сектор OAB , у которого $OA = OB = r$ и $\angle O = \alpha$, вращается вокруг прямой OB (рис. 262). Если C — проекция точки A на прямую OB , то если $\alpha < 90^\circ$, $BC = OB - OC = r - r \cos \alpha$. Если $\alpha > 90^\circ$, $BC = BO + OC = r + r \cos(180^\circ - \alpha) = r - r \cos \alpha$.

Если $\alpha = 90^\circ$, $BC = OB = r - r \cos \alpha$.

Следовательно, при любом значении угла α $BC = r - r \cos \alpha = r(1 - \cos \alpha)$. Тогда

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r(1 - \cos \alpha) = \frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos \alpha).$$

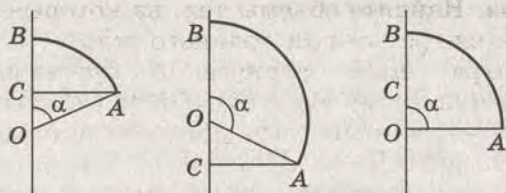


Рис. 262



ЗАДАНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



1332. Чему равен объем шара радиуса 2 см?
1333. Как изменится объем шара, если его диаметр увеличить в 2 раза?
1334. Найдите объем шарового сегмента, высота которого равна 3 см, а радиус — 5 см.
1335. Найдите объем шарового сектора, если $r = 3$ см, $h = 1$ см.
1336. Чему равен объем шара, вписанного в куб, объем которого равен 8 м^3 ?
1337. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, в который вписан шар объема $\frac{4}{3}\pi \text{ см}^3$.

А

1338. Дан куб с ребром a . Найдите объем шара:
а) вписанного в куб; б) описанного вокруг куба.



1339. Найдите объем шара, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α .
1340. Докажите теорему Архимеда: объем шара в 1,5 раза меньше объема описанного вокруг него цилиндра.
1341. Из цилиндра, высота которого равна диаметру, выточили шар наибольшего объема. Сколько процентов материала использовано?
1342. Из цилиндра, осевое сечение которого – квадрат со стороной 10 см, кузнец сковал шар. Найдите радиус этого шара.
1343. Из свинцового шара радиуса 10 мм делают цилиндрический диск толщиной 3 мм. Какой диаметр диска?
1344. Найдите объем шара, описанного вокруг конуса, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α .
1345. Центр шара радиуса r лежит на ребре прямого двугранного угла. Найдите объемы тел, на которые данный шар пересекается гранями двугранного угла.
1346. Из центра шара радиуса r проведены попарно перпендикулярные лучи OA , OB и OC . Найдите объем меньшей части шара, ограниченной плоскостями углов AOB , BOC и COA .
1347. Шар радиуса r рассечен двумя параллельными плоскостями так, что диаметр, перпендикулярный к этим плоскостям, делится точками пересечения на три равные части. Найдите объемы этих частей шара.
1348. Плоскость, перпендикулярная к диаметру шара, разбивает этот диаметр на отрезки, пропорциональные числам 1 и 3. Найдите объемы образованных шаровых сегментов, если радиус шара равен 12 см.
1349. Найдите объем шарового слоя, площади оснований которого равны 225π см² и 264π см², а радиус шара – 17 см.
1350. Полукруг радиуса 9 см, разбитый радиусами на три равных круговых сектора, вращается вокруг диаметра. Найдите объемы тел, образованных вращением этих секторов.
1351. Сколько шариков диаметра 0,6 см можно отлить из куска свинца массой 1 кг? Плотность свинца 11,4 кг/дм³.
1352. Диаметр одного арбуза в 2 раза больше диаметра другого. Во сколько раз первый арбуз тяжелее второго?
1353. Пересыпая песок из полого полушара радиуса r в конус, радиус и высота которого равны r , ученик пришел к выводу, что объем полушара в 2 раза больше объема конуса. Соответствует ли результат этого эксперимента теории?



1354. Масса полого чугунного шара $1,57$ кг, его внешний диаметр 10 см. Найдите внутренний диаметр, если плотность чугуна $7,3$ кг/дм³.
1355. Какой должна быть общая масса космического аппарата, в форме шара радиуса 1 м, чтобы он не тонул в воде?
1356. Из капли мыльного раствора диаметра 6 мм мальчик выдул пузырь диаметром 30 см. Найдите толщину пленки пузыря.
1357. Шар плавает в воде так, что погружена в воду только его половина. Найдите плотность материала, из которого изготовлен шар.
1358. Плоскость делит шар на два сферических сегмента, объемы которых 252π см³ и 720π см³. Найдите высоту большего сегмента.
1359. Найдите объем шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром a .
1360. Найдите объем шара, вписанного в правильный октаэдр с ребром a .
1361. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, объем которой равен V , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α . Найдите объем шара.
1362. Найдите объем шара, описанного вокруг правильной треугольной пирамиды с высотой h и плоским углом при вершине α .

1363. Найдите объем шара, описанного вокруг правильной усеченной шестиугольной пирамиды, у которой стороны оснований равны 3 см и 4 см, а высота 7 см.
1364. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите объем шара, если расстояние от центра шара до стороны основания равно $\sqrt{5}$ м, а до бокового ребра — $\sqrt{3}$ м.
1365. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Найдите отношение объема шара к объему пирамиды, если площадь боковой грани пирамиды равна площади основания.
1366. Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно m . Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости основания.
1367. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, в который вписан шар радиуса R , если его объем в k раз больше объема шара.



1368. Шар радиуса 6 дм плавает в воде. Найдите высоту части шара, выступающей из воды, если плотность материала шара $0,7 \text{ г/см}^3$.
- 1369*. Шар объема V касается 12 ребер куба. Найдите объем куба.
- 1370*. Шар касается одной грани куба и четырех ребер, которые принадлежат противоположной грани. Найдите отношение объема куба к объему этого шара.



Упражнения для повторения

1371. Найдите отношение объемов конусов, один из которых описан вокруг правильной треугольной пирамиды, а другой вписан в эту пирамиду.
1372. Осевым сечением конуса является треугольник, у которого угол при вершине равен α , а радиус вписанной окружности r . Найдите объем конуса.
1373. Найдите объем тела, образованного при вращении прямоугольного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), у которого $BC = a$, $\angle A = 60^\circ$, вокруг прямой, которая проходит через вершину угла A перпендикулярно к: а) AC ; б) AB ; в) биссектрисе угла A .



§ 35

ТЕОРЕМА ГУЛЬДИНА

Рационализировать вычисления объемов многих тел вращения дает возможность теорема Гульдина.

Теорема 34. Объем тела, образуемого вращением плоской фигуры вокруг оси, которая лежит в ее плоскости и не пересекает ее, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной ее центром масс.

Полное доказательство этой теоремы громоздкое. Мы докажем ее только для случая, когда фигура, которая вращается, симметрична относительно прямой или точки.

Пусть дана фигура F , симметричная относительно прямой l , параллельной оси x и удаленной от этой оси на расстояние p (рис. 263). Если кривой AmB отвечает заданная на

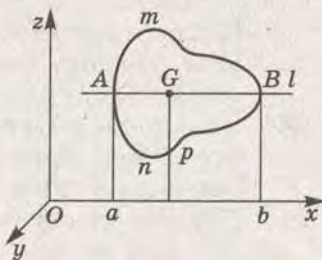


Рис. 263



π отрезке $[a; b]$ функция $z = p + f(x)$, то кривой AmB – заданная на этом же отрезке функция $z = p - f(x)$. Поэтому объем V тела, образованного вращением фигуры F вокруг оси x , равен

$$\pi \int_a^b (p + f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (p - f(x))^2 dx = 4\pi p \int_a^b f(x) dx.$$

Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ выражает площадь фигуры, ограниченной линией AmB и осью l , он равен $0,5S$. Следовательно, объем рассматриваемого тела вращения $V = 2\pi pS$, где S – площадь плоской фигуры, которая вращается, $2\pi p$ – длина окружности, описанной центром масс G фигуры F .

Если фигура F не выпуклая, ее можно разбить на части. Например, если S, S_1, S_2 – площади фигур, ограниченных линиями AB_1BB_2A, AB_1CB_2A и BB_1CB_2B (рис. 264), то $S = S_1 - S_2$ и искомый объем

$$V = 2\pi pS_1 - 2\pi pS_2 = 2\pi p(S_1 - S_2) = 2\pi pS.$$

Если фигура вращения F центрально-симметричная, то проведем через ее центр симметрии прямые l и t , параллельные соответственно осям x и z (рис. 265). Пусть S и p – площадь фигуры F и расстояние от ее центра масс до оси x . Заменяем в фигуре F ту ее часть, которая находится ниже прямой l , на симметричную ей относительно прямой t . Получим новую фигуру F_1 , симметричную прямой l . Объем тела, образованного вращением фигуры F_1 вокруг оси x , равен $2\pi pS$. Площади фигур F и F_1 равны, равны и объемы тел, образованных вращением этих фигур вокруг оси x . Поэтому объем тела, образованного вращением фигуры F вокруг оси x , и в этом случае равен $2\pi pS$.

Следствие. Объем тора, радиусы которого p и r (см. рис. 226), можно найти по формуле

$$V = 2\pi^2 pr^2.$$

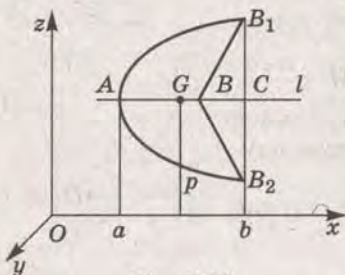


Рис. 264

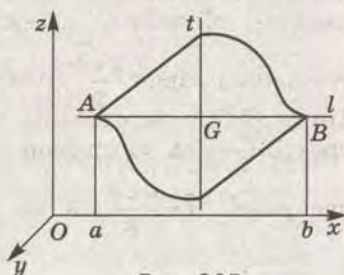


Рис. 265

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте теорему Гульдина.
2. Докажите теорему Гульдина для случая, если фигура, которая вращается, симметрична относительно прямой.
3. Выполняется ли теорема Гульдина для случая, если фигура, которая вращается, не выпуклая?
4. Докажите теорему Гульдина для случая, когда фигура F симметрична относительно точки.
5. Чему равен объем тора?
6. Как найти центр масс для: а) треугольника; б) квадрата; в) правильного шестиугольника?



Выполним вместе

1. Найдите объем тела, образованного вращением круга радиуса r вокруг касательной к его окружности.

РЕШЕНИЕ. На рисунке 266 изображено осевое сечение рассматриваемого тела вращения.

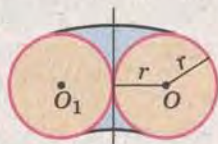


Рис. 266

Площадь круга, который вращается, равна πr^2 . Расстояние центра круга O от оси вращения равно r . Поэтому по теореме Гульдина объем тела

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 r^3.$$

2. Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг прямой, которая параллельна стороне треугольника и находится на расстоянии d ($d > a$) от нее. Найдите объем тела вращения.

РЕШЕНИЕ. Возможны два варианта положения треугольника относительно прямой l , вокруг которой он вращается (рис. 267, а, б). Центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан. Медиана равностороннего треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, поэтому $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Тогда OK – расстояние от центра масс треугольника до прямой l – в первом случае равно $d + \frac{a\sqrt{3}}{6}$, а во втором случае

$$d - \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

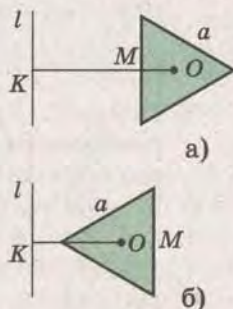


Рис. 267



Зная, что площадь треугольника равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, можем найти объем образованного тела. В первом случае

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\pi \left(d + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) = \pi \left(\frac{a^2 d \sqrt{3}}{2} + \frac{a^3}{4} \right),$$

а во втором случае $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\pi \left(d - \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) = \pi \left(\frac{a^2 d \sqrt{3}}{2} - \frac{a^3}{4} \right)$.

ОТВЕТ.

$$V = \pi \left(\frac{a^2 d \sqrt{3}}{2} + \frac{a^3}{4} \right) \text{ или } V = \pi \left(\frac{a^2 d \sqrt{3}}{2} - \frac{a^3}{4} \right).$$



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



1374. Чему равна длина окружности, описанной центром масс квадрата при вращении этого квадрата вокруг его стороны, которая равна a ?
1375. Чему равна длина окружности, описанной центром масс правильного шестиугольника при вращении этого шестиугольника вокруг стороны, которая равна a ?
1376. Определите объем тела, образованного при вращении квадрата со стороной a вокруг его стороны.
1377. Чему равен объем тела, образованного вращением равно-
стороннего треугольника со стороной a вокруг его стороны?
1378. Квадрат со стороной 2 см вращается вокруг прямой, которая параллельна его стороне и удалена от нее на 3 см. Найдите расстояние от этой прямой до центра масс квадрата и объем образованного тела вращения. Сколько решений имеет задача?

А

1379. Найдите объем тела, образованного вращением равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h вокруг его основания.
1380. Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг оси, которая проходит через вершину острого угла параллельно его диагонали. Найдите объем тела вращения.
1381. Найдите объем тела, образованного вращением правильного шестиугольника со стороной a вокруг стороны.

1382. Найдите объем тела, образованного вращением квадрата вокруг оси, которая проходит через вершину квадрата и параллельна его диагонали, если длина диагонали d .
1383. Найдите объем тела, образованного вращением квадрата вокруг оси, которая проходит через вершину квадрата и перпендикулярна к его диагонали, если длина стороны квадрата a . Доопределите задачу.

Б

1384. Найдите положение центра масс данного полукруга.
1385. Полукруг радиуса r вращается вокруг прямой, которая касается полуокружности и параллельна диаметру. Найдите объем тела вращения.
1386. Найдите объем тела, образованного вращением круга радиуса $r = 25$ см вокруг касательной к его окружности.
1387. Докажите теорему Гульдина для случая, когда фигура F – треугольник.
1388. Равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна b , а угол при вершине α , вращается вокруг боковой стороны. Найдите объем тела вращения.
1389. $ABCD$ – прямоугольник. Найдите отношение объемов тел, образованных вращением треугольников ABD и BCD вокруг прямой AB . Обобщите задачу в случае параллелограмма.
1390. Найдите отношение объемов тел, образованных вращением треугольника вокруг каждой из его сторон, если они равны a, b, c .
1391. Параллелограмм вращается вокруг оси, которая проходит через вершину тупого угла параллельно диагонали. Найдите объем тела вращения, если площадь параллелограмма равна S , а большая диагональ d .
1392. $ABCD$ – параллелограмм, $AK \parallel BD$. Найдите отношение объемов тел, образованных вращением треугольников ABD и BCD вокруг прямой AK .
1393. Точки $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(2; 3; 4)$ – вершины треугольника. Найдите объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг прямой:
а) AC ; б) BC .

В

1394. В треугольнике даны основание a и прилежащие углы α и $90^\circ + \alpha$. Найдите объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания. Вычислите, если $a = 18$ дм, $\alpha = 41^\circ$.



1395. Найдите объем тела, образованного вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг оси, которая проходит через его вершину A параллельно диагонали $BD = d$, если угол ADB равен α .
1396. Найдите объем тела, образованного вращением квадрата вокруг оси, которая проходит через середины его смежных сторон. Сторона квадрата равна a .
1397. Найдите объем тела, образованного вращением куба вокруг его ребра, если длина ребра куба равна a .
1398. Найдите объем тела, образованного вращением правильного тетраэдра вокруг его ребра, если длина ребра равна a .
- 1399*. V – объем тела, образованного вращением куба вокруг его диагонали, длина которой равна d . Что больше: V или $\frac{2}{9}\pi d^3$?



Упражнения для повторения

1400. Основания цилиндра, осевое сечение которого – квадрат, являются сечениями шара. Найдите отношение объемов шара и цилиндра.
1401. Полукруг радиуса 9 см, который вращается вокруг своего диаметра, разбит радиусами на три круговых сектора с углами 60° , 90° и 30° , взятых в таком порядке. Найдите объемы тел, образованных вращением этих секторов.
1402. В правильную четырехугольную усеченную пирамиду, стороны оснований которой относятся как $a : b$, вписан шар. Найдите отношение объемов усеченной пирамиды и шара.



ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Формулы для вычисления площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса были выведены через развертки этих поверхностей (см. § 25 и § 26). Но развернуть сферу на плоскость невозможно. Поэтому обобщим понятие площади поверхности.

Пусть дана некоторая поверхность F – плоская или кривая, но такая, что в каждой ее точке можно построить плоскость, касательную к данной поверхности. Именно такими являются поверхности шара, цилиндра, конуса, тора и других тел, которые рассматриваются в этом учебнике. Представим, что от каждой точки данной поверхности с одной от нее стороны



проведен отрезок длиной t , перпендикулярный к плоскости, касающейся поверхности в этой точке. Тело, образованное всеми такими отрезками, назовем *слоем толщины t* поверхности F (рис. 268). Наглядно его можно представить как слой краски толщиной t , нанесенный на данную поверхность с одной стороны. Объем V_t этого слоя может быть числовой характеристикой площади. Например, если на окрашивание шара идет краски в S раз больше, чем на окрашивание листа жести площадью 1 м^2 , то площадь поверхности шара равна приблизительно $S \text{ м}^2$. Если толщина слоя t , то на окрашивание листа и шара идет соответственно $t \text{ м}^3$ и $V_t = St \text{ м}^3$ краски. Следовательно, $S \approx \frac{V_t}{t}$. Это равенство тем точнее, чем меньше t . Вот почему имеет смысл принять такое определение.

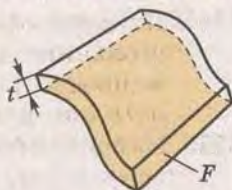


Рис. 268

Пусть V_t — объем слоя толщины t поверхности F . Тогда *площадь данной поверхности* будем называть предел отношения $\frac{V_t}{t}$, когда $t \rightarrow 0$, то есть $S = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t}{t}$.

Если поверхность F — плоский многоугольник или круг с площадью S , то соответствующий слой толщины t — призма или цилиндр объема $V_t = St$. В этом случае

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{St}{t} = S.$$

Для боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h объем слоя толщины t

$$V_t = \pi(r + t)^2 h - \pi r^2 h = \pi h t (2r + t).$$

Поэтому ее площадь $S = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \pi h (2r + t) = 2\pi r h.$

Для боковой поверхности конуса, образующая которого $AD = l$, а радиус $HD = r$, объем V_t слоя толщины t равен объему тела, образованного вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AH (рис. 269). Если OM — расстояние от прямой AH до середины диагонали AC , то по теореме Гульдина $V_t = 2\pi \cdot MO \cdot AD \cdot AB = 2\pi \cdot MO \cdot lt$. Если $t \rightarrow 0$, то $C \rightarrow D$ и $MO \rightarrow \frac{r}{2}$.

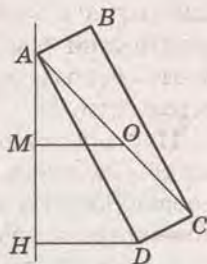


Рис. 269

Следовательно, $S = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 2\pi l \cdot MO = \pi r l.$

Как видим, новое определение площади поверхности не противоречит предыдущей трактовке площади многоугольника, круга, боковой поверхности цилиндра и конуса. Но оно дает возможность вычислять площади и таких поверхностей, которые развернуть на плоскости невозможно.

Теорема 35. *Площадь сферы радиуса r равна $4\pi r^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана сфера радиуса r (рис. 270). Слой толщины t для нее – тело, которое находится между двумя концентрическими сферами радиусов r и $r + t$. Его объем

$$V_t = \frac{4}{3}\pi(r+t)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2t + 3rt^2 + t^3).$$

Следовательно, площадь поверхности данной сферы

$$S = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rt + t^2) = 4\pi r^2.$$

Теорема доказана.



Рис. 270

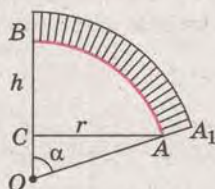


Рис. 271

Формулу для нахождения площади сферического сегмента можно вывести аналогично. Пусть сферический сегмент – поверхность, образованная вращением дуги AB сектора OAB вокруг прямой OB (рис. 271). Если $OB = r$, $BC = h$, $AA_1 = t$, то, как следует из задачи 2 на с. 258:

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{2}{3}\pi(r+t)^3(1-\cos\alpha) - \frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha) = \\ &= \frac{2}{3}\pi(1-\cos\alpha)(3r^2t + 3rt^2 + t^3). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{3}\pi(1-\cos\alpha)(3r^2 + 3rt + t^2) = \\ &= 2\pi r^2(1-\cos\alpha) = 2\pi rh. \end{aligned}$$

Вычислим еще площадь поверхности тора, радиусы которого ρ и r . Объем слоя толщины t для данного тора равен разности объемов двух торов:

$$V_t = 2\pi^2\rho(r+t)^2 - 2\pi^2\rho r^2 = 2\pi^2\rho(2rt + t^2).$$

Поэтому площадь поверхности данного тора

$$S = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 2\pi^2 \rho(2r+t) = 4\pi^2 \rho r.$$

Следовательно, площади сферы, сферического сегмента и тора можно вычислять по формулам:

$$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2, S_{\text{сегм}} = 2\pi r h, S_{\text{тор}} = 4\pi^2 \rho r.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют площадью поверхности F ?
2. Выведите формулу для нахождения площади боковой поверхности цилиндра.
3. Как найти площадь боковой поверхности конуса?
4. По какой формуле вычисляют площадь сферы?
5. Докажите формулу для нахождения площади сферы.
6. Как найти площадь сферического сегмента?
7. По какой формуле находят площадь поверхности тора?



Выполним вместе

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b и наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите площадь сферы, описанной вокруг пирамиды.

РЕШЕНИЕ. Высота PO_1 пирамиды $PABCD$ лежит на диаметре PP_1 описанной сферы (рис. 272). Угол PAP_1 прямой, так как опирается на диаметр окружности, проходящей через точки A , P и P_1 . Углы PP_1A и PAO_1 равны, поскольку каждый из них дополняет угол APP_1 до 90° .

Если радиус сферы равен r , то $PP_1 = 2r$. Из прямоугольного треугольника PAP_1 имеем:

$$2r = \frac{AP}{\sin \angle PP_1A} = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad r = \frac{b}{2 \sin \alpha}.$$

Следовательно, площадь сферы

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{b^2}{4 \sin^2 \alpha} = \frac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha}.$$

ОТВЕТ. $S = \frac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha}.$

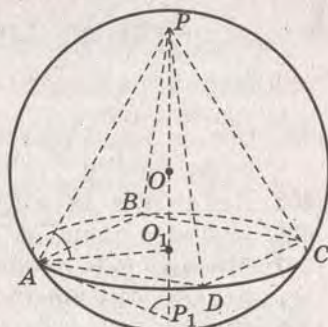


Рис. 272



2. Цилиндр, осевым сечением которого является квадрат, вписан в шар радиуса R . Найдите площадь поверхности тела, ограниченного боковой поверхностью цилиндра и шаровым поясом, который находится между плоскостями оснований цилиндра.

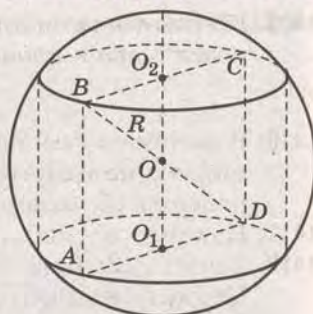


Рис. 273

РЕШЕНИЕ. Пусть радиус основания цилиндра равен r (рис. 273). По свойству диагонали квадрата $BD = AD\sqrt{2}$, т. е. $2R = 2r\sqrt{2}$, откуда

$$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}. \text{ Тогда } AB = R\sqrt{2} \text{ и площадь боковой поверхности}$$

$$\text{цилиндра: } S_{\text{б.ц}} = 2\pi \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R\sqrt{2} = 2\pi R^2.$$

Чтобы найти площадь поверхности шарового пояса, найдем сначала площади поверхностей сферических сегментов, которые от шара отсекают плоскости оснований цилиндра.

$$\text{Поскольку высота сегмента равна } R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = R \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\text{то } S_{\text{сегм}} = 2\pi R \cdot R \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) = \pi R^2 (2 - \sqrt{2}).$$

Найдем площадь поверхности шарового пояса:

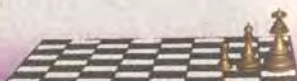
$$S_{\text{п}} = S_{\text{ш}} - 2S_{\text{сегм}} = 4\pi R^2 - 2\pi R^2 (2 - \sqrt{2}) = 2\pi R^2 (2 - 2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\pi R^2.$$

$$\text{Тогда } S = 2\pi R^2 + 2\sqrt{2}\pi R^2 = 2\pi R^2 (1 + \sqrt{2}).$$



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Выполните устно



1403. Найдите площадь сферы радиуса 5 см.
1404. Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi \text{ см}^3$. Чему равна площадь его поверхности?
1405. Найдите радиус сферы, если ее площадь равна $36\pi \text{ м}^2$.
1406. Найдите площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
1407. Объемы двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся площади их поверхностей?
1408. Найдите площадь поверхности шарового сегмента радиуса r и высоты $h = 0,5r$.

1409. Шар вписан в цилиндр. Найдите отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности цилиндра.
- A**
1410. В каком случае расходуется больше материала: на никелирование одного шара диаметром 8 см или на никелирование 15 шаров диаметром 2 см каждый?
1411. Найдите площадь сферы $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = 4$.
1412. Точки $A(2; 0; 3)$ и $B(0; 4; 7)$ — концы диаметра сферы. Найдите ее площадь.
1413. Сфера с центром $A(1; 1; 1)$ проходит через точку $M(2; -1; 8)$. Найдите площадь сферы.
1414. Как относятся площади сфер, вписанной в куб и описанной вокруг него?
1415. Найдите площадь сферы, описанной вокруг прямоугольного параллелепипеда, измерения которого 3 дм, 4 дм и 5 дм.
1416. Найдите площадь сферы, вписанной в правильную пирамиду, апофема которой равна m и наклонена к плоскости основания под углом α . Вычислите, если $m = 15$ см, $\alpha = 60^\circ$.
1417. У правильной треугольной пирамиды сторона основания равна a , а двугранный угол при ребре основания α . Найдите площадь сферы, вписанной в пирамиду.
1418. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит ее высоту в отношении 5 : 3. Найдите отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности пирамиды.
1419. Найдите поверхность сферы, вписанной в правильный октаэдр, площадь поверхности которого равна $72\sqrt{3}$ см².
1420. Из центра O сферы радиуса r проведены три попарно перпендикулярных луча OA , OB , OC . Найдите площадь меньшей части сферы, ограниченной плоскими углами AOB , BOC и COA .
1421. Сферу радиуса r пересекает плоскость, удаленная от центра на расстояние $d = \frac{1}{3}r$. Найдите площади сферических сегментов.
1422. Найдите площадь поверхности шарового сегмента радиуса r и высоты $h = 0,5r$.
1423. Найдите площадь поверхности выпуклого шарового сектора, если его радиус r , а высота конуса h .
1424. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением круга радиуса r вокруг его касательной.
1425. Радиусы сечений сферы двумя перпендикулярными плоскостями равны 3 см и 4 см. Найдите площадь сферы, если сечения имеют только одну общую точку.



1426. В шаре радиуса R проведены два параллельных сечения, которые делят перпендикулярный к ним диаметр на части, пропорциональные числам 1, 2 и 3. Найдите площадь поверхности шарового слоя, который находится между плоскостями этих сечений.
1427. Два шара радиусами 8 см расположены так, что центр одного лежит на поверхности второго. Найдите площадь поверхности тела, являющегося общей частью этих шаров.

Б

1428. Основание конуса является сечением шара радиуса R , а его вершина находится на поверхности шара. Найдите площадь поверхности тела, ограниченного боковой поверхностью конуса и сегментной поверхностью шара, которая содержит вершину конуса, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 60° .
1429. Как относятся площади сфер, вписанной в правильный октаэдр и описанной вокруг него?
1430. Найдите площадь поверхности шара, описанного вокруг пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной 6 см, а одно из боковых ребер равно 4 см и перпендикулярно к плоскости основания.
1431. Вокруг правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой и высота равны 6 см, описана сфера. Вторая сфера проходит через центр первой и все вершины основания пирамиды. Найдите отношение площадей поверхностей сфер.
1432. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а плоский угол при вершине пирамиды α . Найдите площадь поверхности вписанного шара.
1433. Отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно $8 : 3$. Найдите отношение площадей их поверхностей.
1434. В вершинах правильного тетраэдра с ребром a расположены центры четырех равных сфер, которые попарно касаются друг друга. Найдите площадь поверхности сферы, которая касается всех этих сфер.
1435. Докажите, что объемы шара и многогранника, описанного вокруг него, относятся как площади их поверхностей.
1436. Центр сферы радиуса r лежит на ребре двугранного угла. Найдите площадь части сферы, которая вырезается гранями двугранного угла, если его линейный угол равен φ° .
1437. Найдите площадь части сферы радиуса r , которая вырезается гранями прямого трехгранного угла, если его вершина лежит в центре сферы.

1438. Найдите площадь поверхности велосипедной камеры, радиусы которой равны 30 см и 30 мм.
1439. В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой вершина A удалена от плоскости A_1BC , образующей с плоскостью основания угол 45° , на a . Найдите площади поверхностей сегментов, на которые шар разбивается плоскостью боковой грани призмы.
1440. Полушар и конус с высотой 20 см и радиусом основания 15 см имеют общее основание. Найдите площадь поверхности части полушара, которая находится: а) снаружи конуса; б) внутри конуса.
1441. Радиусы сегментных поверхностей двувыпуклого стекла равны 10 см и 17 см, а расстояние между их центрами 21 см. Найдите площадь поверхности стекла.
1442. Найдите площадь поверхности выпукло-вогнутой линзы, у которой радиусы поверхностей равны 25 см и 29 см, а расстояние между центрами 6 см.
1443. В усеченный конус с площадью боковой поверхности Q вписан шар с площадью поверхности q . Найдите угол между образующей и плоскостью большего основания усеченного конуса.
1444. Поверхность шара, вписанного в правильную треугольную усеченную пирамиду, относится к поверхности пирамиды как $\pi:6\sqrt{3}$. Найдите двугранный угол при ребре основания пирамиды.
- 1445*. Докажите, что площадь поверхности конуса больше площади поверхности вписанного в него шара.
1446. Определите радиусы двух шаров, которые, пересекаясь, образуют двувыпуклую линзу, когда известно, что толщина линзы $2a$, площадь ее поверхности S и диаметр линзы $2r$.

Упражнения для повторения

1447. Радиусы двух шаров пропорциональны числам 1 и 3, а разность их объемов равна 936π см³. Найдите объемы этих шаров.
1448. Шар вписан в прямой параллелепипед, диагонали основания которого равны p и q . Найдите площадь поверхности параллелепипеда.
1449. Периметр прямоугольного треугольника равен 16 см, а один из острых углов α . Найдите объем тела, образованного при вращении треугольника вокруг гипотенузы.

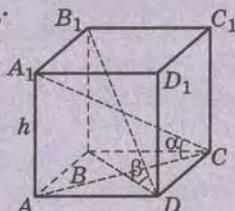


ЗАДАЧИ ПО ГОТОВЫМ РИСУНКАМ

А

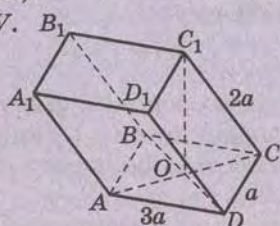
$ABCA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – ромб.

Найдите $V_{\text{пр}}$.



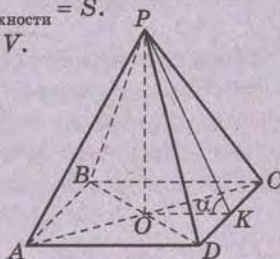
$ABCD$ – прямоугольник, $C_1O \perp (ABC)$.

Найдите V .



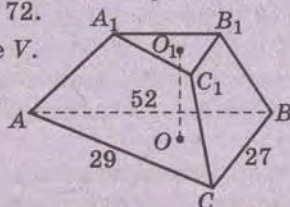
$PABCD$ – правильная пирамида, $S_{\text{поверхности}} = S$.

Найдите V .



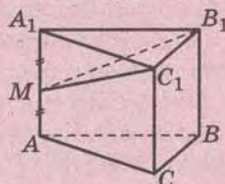
$ABCA_1B_1C_1$ – усеченная пирамида, $OO_1 \perp (ABC)$, $OO_1 = 20$, $P_{A_1B_1C_1} = 72$.

Найдите V .

**Б**

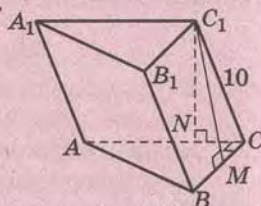
$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $AM = A_1M$.

Найдите $V_{MA_1B_1C_1} : V_{ABCMB_1C_1}$.



$\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 14$, $C_1M = C_1N = 8$.

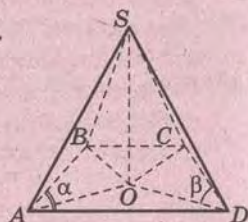
Найдите V .



$AB = BC = CD = a$,

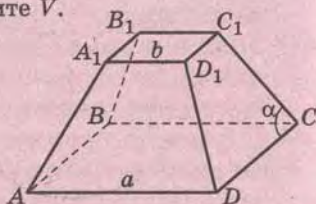
$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = \beta$, $\angle BAD = \alpha$.

Найдите V .



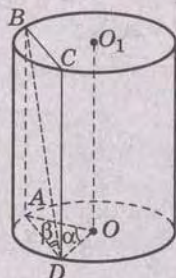
$ABCA_1B_1C_1D_1$ – правильная усеченная пирамида, $AD = a$, $A_1D_1 = b$.

Найдите V .

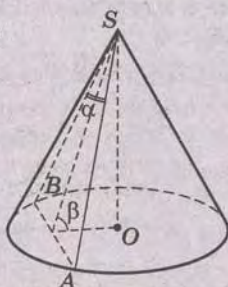


А

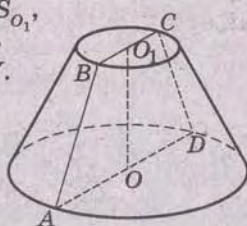
$OO_1 \parallel (ABC)$,
 $\angle AOD = \alpha$,
 $\angle ADB = \beta$,
 $S_{ABCD} = Q$.
 Найдите V .



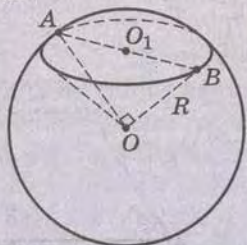
$AS = l$.
 Найдите V .



$AO = 3BO_1$,
 $S_6 = S_0 + S_{O_1}$,
 $S_{ABCD} = 24$.
 Найдите V .

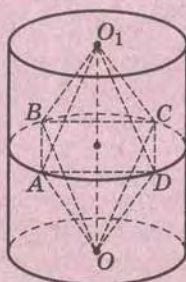


Найдите $V_{\text{сект}}$.

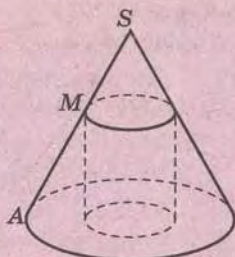


Б

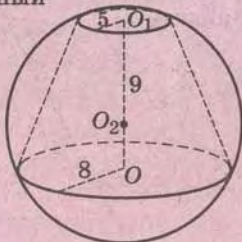
$OABCD O_1$ – правильный октаэдр.
 Найдите $V_{\text{ц}} : V_{\text{окт}}$.



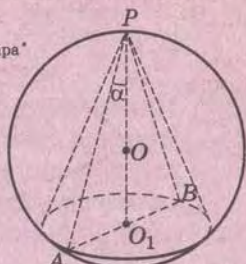
$SM : AM = 1 : 2$, $V_{\text{ц}} = 6$.
 Найдите $V_{\text{к}}$.



OO_1 – усеченный конус.
 Найдите $V_{\text{к}}$.



$S_{\triangle APB} = Q$.
 Найдите $S_{\text{шара}}$.



ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в куб, объем которого равен 27 см^3 .
а) $36\pi \text{ см}^2$; б) $9\pi \text{ см}^2$; в) $3\pi \text{ см}^2$; г) $12\pi \text{ см}^2$.
2. Найдите объем правильной треугольной призмы, каждое ребро которой равно a .
а) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$; г) $3a^3$.
3. В тетраэдре три ребра, выходящие из одной вершины, взаимно перпендикулярны и равны 3 м, 4 м и 5 м. Найдите объем тетраэдра.
а) 60 см^3 ; б) 20 см^3 ; в) 10 см^3 ; г) 27 см^3 .
4. Найдите площадь поверхности сферического сегмента, у которого $R = 5 \text{ см}$, $h = 0,4R$.
а) $10\pi \text{ см}^2$; б) $20\pi \text{ см}^2$; в) $200\pi \text{ см}^2$; г) $4\pi \text{ см}^2$.
5. Два цилиндра имеют равные высоты, а площадь боковой поверхности первого в 3 раза больше площади боковой поверхности второго. Найдите отношение объемов этих цилиндров.
а) 3 : 1; б) 6 : 1; в) 9 : 1; г) 27 : 1.
6. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а высота – 6 см. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем образованной усеченной пирамиды.
а) 24 см^3 ; б) 20 см^3 ; в) 28 см^3 ; г) 84 см^3 .
7. Найдите объем цилиндра, в который вписан шар радиуса R .
а) πR^3 ; б) $2\pi R^3$; в) $\frac{2}{3}\pi R^3$; г) $\frac{1}{3}\pi R^3$.
8. Найдите объем тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой с вокруг прямой, содержащей гипотенузу.
а) $\frac{c^3}{8}$; б) $\frac{\pi c^3}{24}$; в) $\frac{c^3}{6}$; г) $\frac{\pi c^3}{12}$.
9. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания являются вершинами пирамиды. Найдите ее объем, если объем призмы равен V .
а) $\frac{1}{2}V$; б) $\frac{1}{3}V$; в) $\frac{1}{6}V$; г) $\frac{2}{3}V$.



ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

- 1°. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а диагональное сечение является правильным треугольником.
- 2°. Найдите объем призмы, вписанной в шар радиуса 7 см, если основанием призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см.
- 3°. Определите площади поверхностей частей шара радиуса 13 см, на которые он разбивается секущей плоскостью площадью 25π см².
- 4°. Прямоугольный треугольник с катетами 30 см и 40 см вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем и площадь поверхности образованного тела вращения.
- 5°. Найдите объем конуса, если угол при вершине осевого сечения равен 60° , а расстояние от центра основания конуса до его образующей — l .
- 6°. Радиусы оснований двух цилиндров пропорциональны числам 2 и 3. Найдите отношение объемов этих цилиндров, если площади их боковых поверхностей равны.
- 7°. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в шар радиуса R , если боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 45° .
- 8°. Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см, а боковое ребро равно 4 см и образует со смежными сторонами основания углы по 60° . Найдите объем параллелепипеда.
- 9°. В прямую призму, основанием которой является равнобедренная трапеция, вписан куб таким образом, что его вершины лежат на серединах сторон оснований призмы. Найдите объем призмы, если площадь поверхности куба S .
- 10°. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 5 см, а угол между диагоналями осевого сечения 60° . Найдите объем усеченного конуса.
- 11°. В полушар вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите отношение объема этого цилиндра к объему полушара.
- 12°. На плоскости лежат три одинаковых шара радиуса R , каждый из которых касается двух других. Найдите объем четвертого шара, который лжжит на той же плоскости и касается всех трех шаров.

ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 4

1. Объем — количественная характеристика тела, которая удовлетворяет таким условиям:
- каждое тело имеет определенный объем, выраженный положительным числом;
 - равные тела имеют равные объемы;
 - если тело разбито на несколько частей, то его объем равен сумме объемов всех этих частей;
 - объем единичного куба равен единице.

2. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений: $V = abc$.

Объем призмы (и цилиндра) равен произведению площади основания на высоту: $V = Sh$.

Объем цилиндра $V = \pi r^2 h$.

3. Объем пирамиды (и конуса) равен трети произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3}Sh$. Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

4. Объем усеченной пирамиды (и усеченного конуса), площади основания которой S и S_1 , а высота h , можно определить по формуле $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS_1} + S_1)$.

5. Объем шара радиуса r определяется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Объем шарового сегмента радиуса r и высотой h :

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

Объем шарового сектора радиуса r и высотой h :

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

6. Площадь

поверхности цилиндра:

$$S_{\text{б ц}} = 2\pi rh, \quad S_{\text{ц}} = 2\pi r(r + h);$$

конуса:

$$S_{\text{б к}} = \pi rl, \quad S_{\text{к}} = \pi r(r + l);$$

усеченного конуса:

$$S_{\text{б ук}} = \pi l(r_1 + r_2);$$

шара:

$$S_{\text{шара}} = 4\pi r^2;$$

сферического сегмента:

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi rh;$$

тора:

$$S_{\text{т}} = 4\pi^2 pr.$$

7. Объемы подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных элементов.

Задачи для повторения

1450. Существует ли многогранник, который одной плоскостью пересекается на пять многогранников?
1451. Нарисуйте многогранник, отличный от куба, все грани которого – квадраты.
1452. Докажите, что не существует многогранника, каждая грань которого имеет больше пяти сторон.
1453. Докажите, что не существует многогранника, каждый многогранный угол которого имеет больше пяти граней.
1454. Сторона основания правильной четырехугольной призмы a , а высота h . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, которая делит двугранный угол при боковом ребре в отношении $1 : 2$.
1455. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом 30° . Найдите угол наклона ее к основанию.
1456. Дано изображение куба. Постройте общий перпендикуляр для диагонали этого куба и скрепляющегося с ней ребра.
1457. Сторона основания правильной четырехугольной призмы 10 см. Найдите расстояние от бокового ребра до скрепляющейся с ним диагонали призмы.
1458. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15 см, высота призмы – 20 см. Найдите расстояние от стороны основания до скрепляющейся с ней диагонали призмы.
- 1459*. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Найдите угол между плоскостями $AA_1 C_1$ и ABC_1 .
- 1460*. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a .
1461. На поверхности куба найдите точки, равноудаленные от концов одной из его диагоналей.
1462. На поверхности куба найдите три точки, из которых его диагональ видно под наименьшим углом.
1463. Докажите, что когда все ребра параллелепипеда касаются сферы, то параллелепипед – куб.
1464. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 2 дм, а двугранный угол при боковом ребре 120° . Найдите высоту пирамиды.
1465. Каким может быть двугранный угол при боковом ребре правильной пятиугольной пирамиды?

1466*. На грани ABC правильного тетраэдра $ABCD$ дана точка M . Вычислите DM , если $MA = \frac{a}{2}$, $MB = \frac{5}{6}a$, $DA = a$.

1467*. Ребра тетраэдра, которые выходят из вершины A , попарно перпендикулярны и равны a , b и c . Найдите длину ребра куба, вписанного в тетраэдр так, что одна из его вершин совпадает с вершиной A .

1468. Докажите, что квадрат площади любой грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей остальных его граней без удвоенных произведений площадей этих граней, взятых попарно, на косинусы двугранных углов между ними.

1469*. Зная площади оснований усеченной треугольной пирамиды, найдите площадь треугольника с вершинами в точках пересечения диагоналей ее боковых граней.

1470*. В пространстве расположены три правильных пятиугольника $ABCDE$, $AЕKPT$, $ATHMB$. Докажите, что прямые AC , AK и $АН$ попарно перпендикулярны.

1471. Можно ли через точку в пространстве провести шесть разных прямых так, чтобы углы между любыми двумя из них были равны?

1472. Угол развертки боковой поверхности конуса равен 120° , а образующая 15 см. Найдите радиус основания.

1473. Вписанный в тетраэдр $ABCD$ шар касается его граней ABC и CDB соответственно в точках M и K . Докажите, что $\angle AMB = \angle CKD$.

1474. Найдите геометрическое место проекций данной точки пространства на плоскости, которые проходят через другую данную точку.

1475. Четыре плоскости, пересекаясь между собой, образуют тетраэдр. Сколько существует сфер, каждая из которых касается всех четырех плоскостей?

1476. Найдите геометрическое место точек пространства, расположенных в данной плоскости и равноудаленных от двух данных точек.

1477. Найдите множество прямых в пространстве, равноудаленных от двух данных точек.

1478. Постройте сферу, которая проходит через две данные точки и касается двух данных плоскостей.

1479. Найдите геометрическое место центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную точку.

1480. H – точка пересечения всех высот тетраэдра $ABCD$, а O – центр сферы, описанной вокруг него. Докажите, что

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

1481. Ребро правильного тетраэдра равно a . Найдите радиус сферы, которая проходит через вершину A и центры граней ABD , ABC , ACD .
- 1482*. Каждое из четырех звеньев замкнутой ломаной касается сферы. Докажите, что все точки касания лежат в одной плоскости.
- 1483*. На сфере даны точки A , B , C . Найдите на сфере такие точки M , чтобы сумма $MA^2 + MB^2 + MC^2$ была:
а) наибольшей; б) наименьшей.
- 1484*. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы радиуса r до вершин правильного треугольника, описанного вокруг ее экватора, постоянна. Найдите эту сумму.
1485. Найдите сумму квадратов длин всех ребер и диагоналей правильного икосаэдра, если радиус описанной вокруг него сферы равен r .
- 1486*. В сферу радиуса r вписаны два куба. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин одного куба до всех вершин второго.
- 1487*. Сфера касается трех граней куба, имеющих общую вершину, и делит каждое из трех ребер, исходящих из противоположной вершины, на части 2 см и 8 см. Найдите радиус сферы.
1488. Из всех правильных четырехугольных призм данного объема найдите призму, площадь поверхности которой наименьшая.
1489. Из всех правильных четырехугольных призм, вписанных в сферу радиуса r , найдите призму наибольшего объема. Вычислите ее объем.
1490. На скрещивающихся ребрах параллелепипеда даны две точки. Проведите через них плоскость, которая делит параллелепипед на два многогранника равных объемов.
- 1491*. Ребро куба равно 1. Диагональ AC_1 куба является осью вписанной в куб правильной шестиугольной призмы. Найдите объем призмы, если ее высота в 3 раза меньше диагонали куба.
- 1492*. Из данного деревянного куба вытесана правильная шестиугольная призма наибольшего объема. Какой процент материала использован?
1493. В треугольной пирамиде одна из сторон основания равна 16 см, противоположное ей боковое ребро — 18 см; каждое из остальных четырех ребер равно 17 см. Найдите объем этой пирамиды.



1494. Докажите, что каждая плоскость, которая проходит через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равные по объему части.
- 1495*. В треугольной пирамиде $ABCD$ даны два ребра $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, угол между ними $\varphi = 60^\circ$ и расстояние 5 см. Найдите объем пирамиды.
1496. Секущая плоскость делит боковые ребра треугольной пирамиды в отношениях: $m_1 : n_1$, $m_2 : n_2$, $m_3 : n_3$ (считая от вершины). Найдите отношение объемов образованных многогранников.
1497. Докажите, что если h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра, а r — радиус вписанной сферы, то
$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}.$$
1498. Точки пересечения медиан граней тетраэдра являются вершинами другого тетраэдра. Найдите отношение объемов этих тетраэдров.
1499. Докажите, что когда все высоты тетраэдра равны, то все его плоские углы острые.
1500. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания правильной пирамиды до плоскостей боковых граней постоянная.
1501. Докажите, что если все грани тетраэдра равны, то сумма расстояний от любой его внутренней точки до граней постоянная.
1502. Ребро правильного октаэдра равно a . Найдите радиус сферы, касающейся всех его ребер.
1503. Докажите, что объем конуса равен произведению площади его поверхности и одной трети радиуса вписанного шара. Обобщите задачу.
1504. Докажите, что объем конуса во столько раз больше объема вписанного в него шара, во сколько раз поверхность конуса больше поверхности шара.
1505. В треугольнике даны основание a и прилежащие к нему углы α и $\alpha + 90^\circ$. Найдите объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты.
1506. Отношение высоты конуса к радиусу описанного вокруг него шара равно n . Найдите отношение объемов этих тел. При каких n задача имеет решения?
1507. Из всех конусов данного объема найдите конус, площадь боковой поверхности которого наименьшая.
1508. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара относится к площади основания конуса как $4 : 3$. Найдите угол при вершине конуса.
1509. В правильной четырехугольной пирамиде центр описанного шара и центр шара, который касается всех ребер

пирамиды, совпадают. Найдите отношение объема пирамиды к объему вписанного в него шара.

1510. Покажите, что объемы призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара, шарового сегмента можно вычислять по формуле Симпсона $V = \frac{h}{6}(S_1 + 4S_c + S_2)$, где S_1 и S_2 – площади оснований, S_c – площадь среднего сечения, а h – высота тела.
1511. Призматойдом называется многогранник, у которого две грани – основания – произвольные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а каждая из остальных граней – треугольник или четырехугольник, все вершины которого принадлежат основаниям. Докажите, что объем призматоида можно вычислять по формуле Симпсона.
1512. Посуда имеет форму перевернутого конуса, осевое сечение которого – равносторонний треугольник. В нее налита вода так, что когда бросили в посуду металлический шар радиуса r , поверхность воды оказалась касательной к шару. На какой высоте будет вода, если шар вынуть?
1513. Если для человека ростом 165 см нормальной считается масса тела 57 кг, то какая средняя нормальная масса для человека ростом 170 см?
1514. В Антарктиде около 30 млн км³ льда. На сколько метров поднялась бы вода в океанах, если бы он весь растаял? Радиус Земли равен приблизительно 6000 км.
1515. Из всех конусов данного объема найдите конус, площадь поверхности которого наименьшая.
1516. Какой наименьший объем может иметь конус, описанный вокруг шара радиуса r ?
1517. Отношение высоты конуса к радиусу описанного шара равно n . Как относятся объемы этих тел? При каких n задача имеет решение?
1518. Внутри куба с ребром a находится конус, вершина которого совпадает с вершиной куба, а окружность основания касается трех граней куба, которые сходятся в противоположной вершине. Образующая конуса образует с его осью угол α . Найдите объем конуса.
1519. Найдите отношение объемов правильного октаэдра и куба, вершинами которого являются центры граней такого октаэдра.
1520. Тор касается плоскости по окружности радиуса r . Касательный к этой плоскости шар радиуса r касается тора также по окружности. Найдите длину этой окружности и объем тора.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

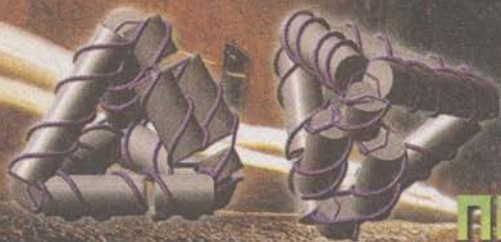
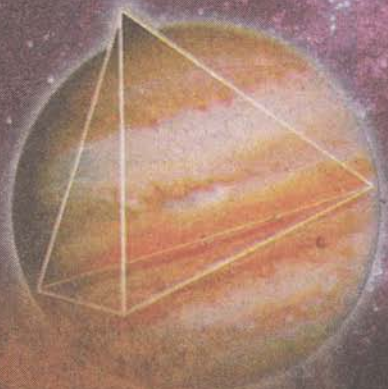
1. Что такое прямоугольная система координат в пространстве?
2. Докажите теорему о квадрате расстояния между точками.
3. Выведите уравнение сферы; плоскости; прямой.
4. В чем суть координатного метода решения задач?
5. Что такое вектор? Какие бывают векторы?
6. Что такое координаты вектора? Объясните запись $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.
7. Сформулируйте правила сложения векторов (правила треугольника, параллелограмма, многоугольника, параллелепипеда).
8. Что называют разностью векторов? Как ее найти?
9. Как умножить вектор на число? Докажите свойства этого умножения.
10. Что значит разложить вектор по трем некомпланарным векторам?
11. Дайте определение скалярного произведения двух векторов.
12. Докажите теорему о центроиде n точек. Сформулируйте следствия из нее.
13. В чем суть векторного метода решения задач?
14. Что такое движение? Какие бывают движения пространства?
15. Докажите важнейшие свойства движений пространства.
16. Докажите, что параллельный перенос, поворот, симметрии относительно точки и плоскости – движения.
17. Что такое композиция движений? Приведите примеры.
18. Что такое центр симметрии; плоскость симметрии фигуры?
19. Какие геометрические фигуры называют равными?
20. Какие фигуры называют гомотетичными? Подобными?
21. Сформулируйте важнейшие свойства гомотетии.
22. Дайте определение правильного многогранника. Назовите все пять видов правильных многогранников.
23. Перечислите элементы симметрии куба.
24. Что такое двугранный угол; многогранный угол?
25. Сформулируйте и докажите пространственную теорему Пифагора.
26. Сформулируйте теорему косинусов для трехгранного угла.
27. Что такое геометрическое тело; поверхность тела?
28. Сформулируйте определение многогранника. Назовите элементы многогранника.
29. Какие многогранники называют выпуклыми?

30. Сформулируйте теорему Эйлера о многогранниках.
31. Сформулируйте определение призмы. Какими бывают призмы?
32. Сформулируйте и докажите теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.
33. Что такое параллелепипед? Какими бывают параллелепипеды?
34. Докажите теорему о пересечении диагоналей параллелепипеда.
35. Что такое пирамида? Перечислите элементы пирамиды.
36. Дайте определение правильной пирамиды.
37. Докажите теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды и правильной усеченной пирамиды.
38. Сформулируйте и докажите теорему о сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию.
39. Что такое тело вращения? Приведите примеры.
40. Дайте определение цилиндра. Назовите элементы цилиндра.
41. Дайте определение конуса. Назовите элементы конуса.
42. Как вычисляют площади поверхности цилиндра; конуса?
43. Какими бывают конические сечения?
44. Дайте определение шара; сферы. Назовите их элементы.
45. Как могут быть расположены две сферы? Сфера и плоскость?
46. Докажите теорему о касательной плоскости к шару.
47. Дайте определение шара, вписанного в многогранник, и шара, описанного вокруг многогранника.
48. Дайте определение призмы, вписанной в цилиндр, и пирамиды, вписанной в конус.
49. Перечислите свойства объема.
50. Чему равен объем призмы?
51. Чему равен объем цилиндра?
52. Как найти площадь поверхности призмы? А пирамиды?
53. Как с помощью интеграла найти объем тела?
54. Как найти объем пирамиды?
55. Как найти объем усеченной пирамиды?
56. Как найти объем конуса? А усеченного конуса?
57. Как найти площадь поверхности цилиндра, конуса?
58. Как относятся объемы подобных многогранников?
59. Как найти объем шара? А площадь сферы?
60. Как найти объем шарового: а) сегмента; б) сектора; в) слоя?

Элементы геометрии тетраэдра

Главные темы раздела:

- Тетраэдр и шар.
- Равногранные тетраэдры.



ПРИЛОЖЕНИЯ



ТЕТРАЭДР И ШАР

1. Шар называется описанным вокруг тетраэдра, а тетраэдр вписанным в шар, если все вершины тетраэдра лежат на поверхности этого шара.

Вокруг каждого тетраэдра можно описать один шар. Действительно, множеством точек, равноудаленных от трех вершин B, C и D тетраэдра, является прямая OO_A , перпендикулярная к плоскости треугольника BCD и проходящая через центр описанной вокруг него окружности (рис. 274). Множеством точек, равноудаленных от вершин A и B , является плоскость ω , которая перпендикулярна к ребру AB и проходит через его середину K . Плоскость ω обязательно пересечет прямую OO_A , ведь AB не лежит в плоскости BCD , следовательно, ω не параллельна OO_A . Пусть ω и OO_A пересекаются в точке O . Тогда $OA = OB = OC = OD$, следовательно, все вершины тетраэдра $ABCD$ лежат на поверхности шара с центром O радиуса OA . Такой шар единственный, потому что прямая OO_A и плоскость ω пересекаются только в одной точке.

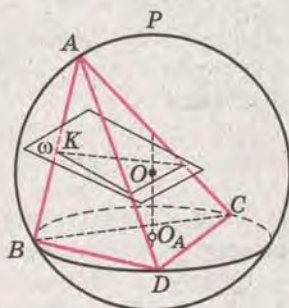


Рис. 274

2. Шар называется вписанным в тетраэдр, а тетраэдр описанным вокруг шара, если все грани тетраэдра касаются этого шара.

В каждый тетраэдр можно вписать шар, и только один.

Как известно, множеством точек, равноудаленных от плоскостей граней ABC, ABD и ACD тетраэдра $ABCD$, является биссектриса AA_1 его трехгранного угла A (рис. 275), а множеством точек, равноудаленных от плоскостей граней ABD и BCD , является биссекторная плоскость BLD двугранного угла при ребре BD . Эта плоскость пересекает прямую AA_1 в некоторой точке I . Точка I равноудалена от всех граней тетраэдра, следовательно, она является центром вписанного в этот тетраэдр шара. Существует только одна точка пересечения прямой AA_1 и плоскости BLD . Следовательно, вписанный в тетраэдр шар существует только один.

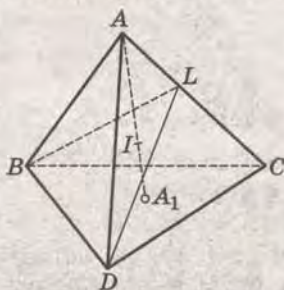


Рис. 275

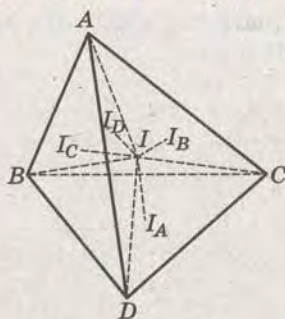


Рис. 276

Определим радиус r вписанного шара. Для этого соединим его центр со всеми вершинами данного тетраэдра и тем самым разделим тетраэдр на четыре меньших: $IABC$, $IADC$, $IABD$, $IBCD$ (рис. 276). Эти тетраэдры имеют равные высоты $h_A = h_B = h_C = h_D = r$. Найдём объёмы тетраэдров:

$$V_{IABC} = \frac{r}{3} S_D, \quad V_{IABD} = \frac{r}{3} S_C, \quad V_{IACD} = \frac{r}{3} S_B,$$

$$V_{IBCD} = \frac{r}{3} S_A.$$

Сумма их равна объёму данного тетраэдра:

$$\frac{r}{3} (S_A + S_B + S_C + S_D) = V,$$

откуда

$$r = \frac{3V}{S_A + S_B + S_C + S_D}.$$

Так выражается радиус вписанного в тетраэдр шара через объём этого тетраэдра и его площадь поверхности.

Радиус r вписанного шара можно выразить и через высоты h_A , h_B , h_C , h_D тетраэдра:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

Выведите последнее равенство из предыдущего.

3. Точки, в которых вписанный в тетраэдр шар касается трех его граней, лежат в плоскости, перпендикулярной к биссектрисе трехгранного угла, образованного этими гранями.

Пусть вписанный в тетраэдр $ABCD$ шар с центром I (рис. 277) касается граней ADC , ABD , ABC соответственно в точках T_B , T_C , T_D . Докажем, что плоскость $T_B T_C T_D$ перпендикулярна к прямой IA .

Отрезки AT_B , AT_C , AT_D равны между собой как касательные к шару, проведенные из одной точки A . Поэтому треугольники AIT_B , AIT_C , AIT_D равны (по трем сторонам). Перпендикуляры, проведенные из точек T_B , T_C , T_D к биссектрисе AI тетраэдра, пересекают ее в одной и той же точке Q . Тогда луч AI перпендикулярен QT_B , QT_C и QT_D . Из этого следует, что $AI \perp (T_B T_C T_D)$.

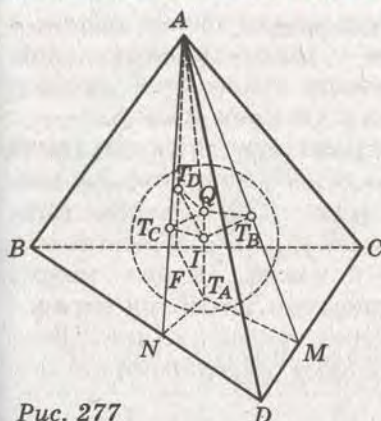


Рис. 277

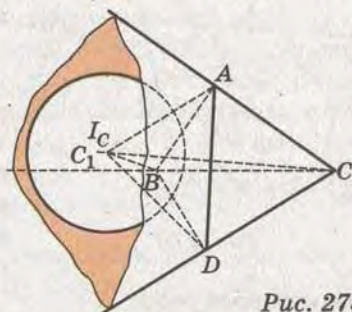


Рис. 278

4. Шар, который касается одной грани тетраэдра и продолжений трех других его граней, называется *вневписанным шаром* тетраэдра.

Проведем биссектрису CC_1 трехгранного угла C тетраэдра $ABCD$ и биссекторную плоскость двугранного угла, смежного с двугранным углом при ребре BD этого тетраэдра (рис. 278). Они пересекаются в некоторой точке I_C (доказывать этот очевидный факт не будем). Точка I_C одинаково удалена от плоскостей всех четырех граней тетраэдра, т. е. является центром шара, касающегося всех этих плоскостей. Это и является одним из вневписанных шаров тетраэдра $ABCD$. Будем называть его *вневписанным шаром тетраэдра $ABCD$ при грани ABD* . Аналогично можно построить вневписанные шары при трех других гранях тетраэдра. Каждый тетраэдр может иметь четыре вневписанных шара.

Чтобы вывести формулы для определения радиусов r_A, r_B, r_C, r_D вневписанных шаров, соединим центр одного из них, например I_C , со всеми вершинами тетраэдра. Тогда объем данного тетраэдра будет равен:

$$V = \frac{r_C}{3} S_A + \frac{r_C}{3} S_B + \frac{r_C}{3} S_D - \frac{r_C}{3} S_C,$$

откуда

$$r_C = \frac{3V}{S_A + S_B - S_C + S_D}.$$

Формулы для определения радиусов других вневписанных шаров аналогичны. Например:

$$r_A = \frac{3V}{-S_A + S_B + S_C + S_D}.$$

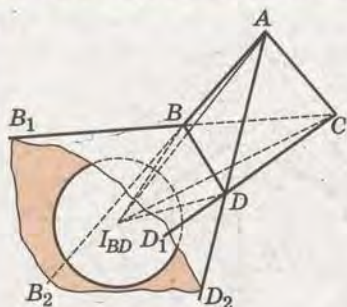


Рис. 279

5. Кроме вневписанных шаров, в тетраэдре рассматривают еще шары, которые касаются продолжений всех четырех граней.

Если продолжить каждую грань тетраэдра $ABCD$, например, за ребро BD (рис. 279), то получим «клин» $BDB_1B_2D_1D_2$. В некоторых случаях в такой «клин» можно вписать шар так, чтобы он касался всех четырех граней «клина». Этот шар называют *вневписанным шаром*

второго рода.

Выведем формулы для вычисления радиусов таких шаров. Соединим центр I_{BD} одного из них со всеми вершинами данного тетраэдра. При этом образуются тетраэдры $I_{BD}ABC$, $I_{BD}ACD$, $I_{BD}ABD$, $I_{BD}BCD$. Легко понять, что разность между суммой объемов двух первых и суммой объемов двух последних равна объему данного тетраэдра V . Поэтому, обозначив радиус рассматриваемого шара с центром I_{BD} буквой r_{BD} , получим:

$$V = \frac{r_{BD}}{3}(S_B + S_D - S_A - S_C),$$

откуда

$$r_{BD} = \frac{3V}{S_B + S_D - S_A - S_C}.$$

Из этого равенства следует, что r_{BD} существует и является положительным числом, если $S_B + S_D > S_A + S_C$. Поэтому если при одном ребре тетраэдра есть вневписанный шар второго рода, то при противоположном к нему ребре такого шара не будет. Следовательно, *тетраэдр может иметь не более трех вневписанных шаров второго рода*. Однако их может быть и два, и один, и вовсе не быть. Например, в правильном тетраэдре таких шаров нет, так как для него $S_B + S_D - S_A - S_C = 0$, следовательно, r_{BD} не существует.

6. Можно ли построить шар, который касался бы всех шести ребер тетраэдра? Не всегда.

Предположим, что для тетраэдра $ABCD$ такой шар существует. Пусть он касается ребер в точках K, L, M, N, E, F (рис. 280). Тогда

$$\begin{aligned} AB + CD &= AK + KB + CM + MD, \\ AC + BD &= AL + LC + BN + ND, \\ AD + CB &= AE + ED + BF + FC. \end{aligned} \quad (*)$$



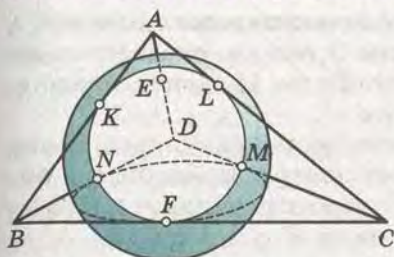


Рис. 280

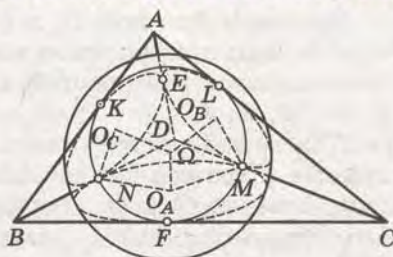


Рис. 281

Но, как известно, отрезки касательных к шару, проведенных из одной точки, равны между собой. Например, $AK = AE = AL$, $BK = BN = BF$ и т. д. Таким образом, правые части равенств (*) равны между собой.

Тогда равны и левые части:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

Следовательно, чтобы можно было построить шар, который касался бы всех ребер тетраэдра, необходимо, чтобы суммы противоположных ребер этого тетраэдра были равны. Этого условия достаточно. Если оно выполняется, то существует такой шар, который касается всех ребер данного тетраэдра. Докажем это.

Пусть в тетраэдре $ABCD$ (рис. 281) суммы противоположных ребер одинаковы:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC. \quad (**)$$

Впишем в грани ACD и BCD круги с центром O_B и O_A . Пусть первый касается ребра CD в точке M , а второй — в M_1 . Тогда

$$CM - MD = CL - DE = AC - AD \text{ и } CM + MD = CD,$$

откуда

$$CM = \frac{1}{2}(AC - AD + CD).$$

Аналогично из треугольника BCD найдем

$$CM_1 = \frac{1}{2}(CB - BD + CD).$$

Но из условия $AC + BD = AD + BC$ следует: $AC - AD = CB - BD$, поэтому $CM_1 = CM$. Следовательно, если выполняется условие (**), то вписанные в грани ACD и BCD окружности касаются ребра CD в одной точке M . Так же можно доказать, что окружности, вписанные в каждые две грани рассматриваемого тетраэдра, касаются их общего ребра в одной точке.



Проведем из точек O_A и O_B перпендикуляры к граням BCD и ACD . Они принадлежат плоскости $O_A M O_B$ и, следовательно, пересекаются в некоторой точке Ω . Точка Ω равноудалена от F, N, M, E, L .

Аналогично можно показать, что перпендикуляры, проведенные к граням CBD и ABD через центры вписанных в них окружностей O_A и O_C , также пересекаются, например в точке Ω_1 . Следовательно, Ω_1 равноудалена от F, N, M, K, E . А это возможно лишь тогда, когда Ω_1 совпадает с точкой Ω , которая равноудалена от F, N, M, E, L, K . Следовательно, сфера Ω радиуса ΩM касается всех ребер данного тетраэдра.

Сферу, которая касается всех шести ребер тетраэдра, называют *полуописанной сферой тетраэдра*. А тетраэдр, для которого такая сфера существует, будем называть *тетраэдром полуописанной сферы*.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ



1521. Докажите, что прямая, которая проходит через вершину D тетраэдра $ABCD$ и его центроид G , пересекает описанную вокруг него сферу в точке D_1 так, что

$$DD_1 = \frac{DA^2 + DB^2 + DC^2}{4DG}.$$

1522. Докажите, что в каждом тетраэдре

$$h_A h_B h_C h_D \geq 256r^4,$$

где h_A, h_B, h_C, h_D — высоты тетраэдра, а r — радиус вписанного в него шара.

1523. Докажите, что точки T_B, T_C, T_D , в которых вписанный в тетраэдр $ABCD$ шар с центром I касается трех граней трехгранного угла A , лежат на сфере диаметра AI .
1524. Докажите, что центр вписанного в тетраэдр шара лежит в середине тетраэдра, образованного точками касания.
1525. Если наложить три грани тетраэдра на четвертую, повернув их вокруг ребер, образующих четвертую грань, то все точки касания вписанного в этот тетраэдр шара совпадут в одной точке T , а вершины трех первых граней расположатся на окружности с центром в точке T . Докажите.
1526. Дана развертка тетраэдра. Укажите на ней точки касания вписанного в этот тетраэдр шара.
1527. Выразите радиусы вневписанных шаров через высоты тетраэдра.



1528. Докажите, что

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_D} = \frac{2}{r},$$

где r — радиус шара, вписанного в тетраэдр, а r_A, r_B, r_C, r_D — радиусы вневписанных в него шаров.

1529. Если вследствие пересечения сферы с ребрами тетраэдра образуется шесть равных между собой хорд, то это тетраэдр полувписанной сферы. Докажите.

1530. Докажите, что когда $ABCD$ — тетраэдр полувписанной сферы, то $\widehat{AB} + \widehat{DC} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = \widehat{AD} + \widehat{BC}$.



РАВНОГРАННЫЕ ТЕТРАЭДРЫ

7. Тетраэдр, все грани которого являются равными между собой треугольниками, называется *равногранным*. Возьмем любой остроугольный треугольник $D_A D_B D_C$ и перегнем его по средним линиям AB, AC, BC (рис. 282) так, чтобы вершины D_A, D_B, D_C совпали. Получим тетраэдр, все четыре грани которого являются равными между собой треугольниками. Это и есть равногранный тетраэдр.

В равногранном тетраэдре противоположные ребра попарно равны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в равногранном тетраэдре $ABCD$ (рис. 283) $AB \neq CD$. В нем грани ABC и ACD равны между собой, следовательно, $BC = CD$ или $AC = CD$. Поэтому по крайней мере один из треугольников BCD и ACD равнобедренный. Но тогда каждая грань этого равногранного тетраэдра имеет по два ребра, равных CD . По предположению $AB \neq CD$, следовательно, $AC = AD = BC = BD = CD$ и грань ACD — равносторонний треугольник. Тогда и треугольник ABD должен быть равносторонним, т. е. $AB = CD$, а это противоречит предположению. Таким образом, предположение не-

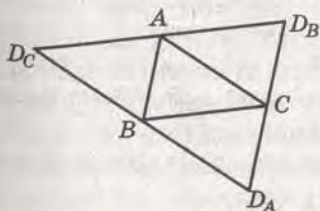


Рис. 282

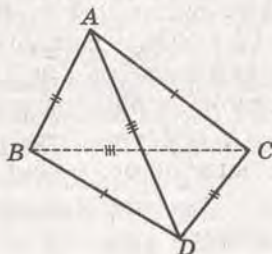


Рис. 283



правильно. В равногранном тетраэдре противоположные ребра всегда равны между собой.

Обратная теорема очевидна. Если $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, то все грани тетраэдра равны между собой (по трем сторонам).

8. Каждый тетраэдр, все четыре грани которого равновеликие, является равногранным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть у тетраэдра $ABCD$ (рис. 284) площади всех граней одинаковые.

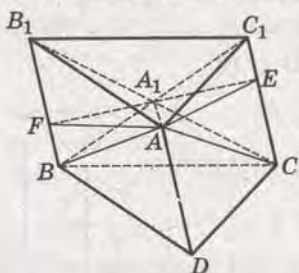


Рис. 284

Параллельно AD проведем отрезки BB_1 , CC_1 , равные AD , и соединим точки A , B_1 , C_1 , т. е. построим к данному тетраэдру $ABCD$ четырехугольную пирамиду $ABCC_1B_1$ так, чтобы вышла треугольная призма AB_1C_1DBC . Очевидно, что треугольники ABD и ABB_1 , ACD и ACC_1 , BCD и AB_1C_1 попарно равны, поэтому все боковые грани пирамиды $ABCC_1B_1$ имеют одинаковые площади, так как все грани данного

тетраэдра равновеликие. А если грани ABB_1 и ACC_1 имеют одинаковые площади, то их высоты AF и EA , проведенные к равным отрезкам BB_1 и CC_1 , равны между собой. Поэтому равны между собой и проекции A_1F , A_1E этих высот на основание пирамиды. Другими словами, основание A_1 высоты пирамиды $ABCC_1B_1$ равноудалено от BB_1 и CC_1 . Аналогично можно доказать, что точка A_1 равноудалена от BC и B_1C_1 , ведь грани ABC и AB_1C_1 также равновеликие. Получается, что A_1 — центр параллелограмма BCC_1B_1 . Тогда $A_1B = A_1C_1$ и, следовательно, $AB = AC_1 = CD$.

Аналогично можно доказать, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

Таким образом, если все грани тетраэдра равновеликие, то его противоположные ребра попарно между собой равны. Следовательно, данный тетраэдр равногранный.

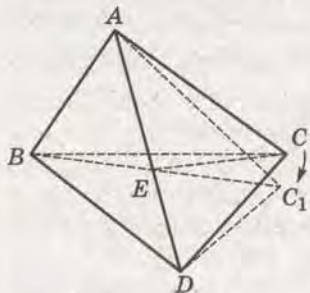


Рис. 285

9. В равногранном тетраэдре все грани — остроугольные треугольники.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что какой-либо плоский угол равногранного тетраэдра $ABCD$, например $\angle ABD$, тупой или прямой (рис. 285). Повернем грань ADC вокруг AD так, чтобы она расположилась в одной плоскости с гранью ABD . Поскольку в равногранном тетраэдре $AB = DC$ и

$AC = BD$, то получим параллелограмм $ABDC_1$. Его диагональ AD по предположению лежит напротив тупого или прямого угла ABD , а поэтому она не меньше другой диагонали $BC_1 = BE + EC$. Но $BE + EC > BC$. Следовательно, $AD > BC$, а такого в равногранном тетраэдре не может быть.

Как видим, не существует равногранного тетраэдра с прямыми или тупыми плоскими углами. Все плоские углы равногранного тетраэдра острые.

10. Каждая средняя линия равногранного тетраэдра перпендикулярна к двум другим его средним линиям и к двум противоположным ребрам, середины которых она соединяет.

Для доказательства опишем вокруг данного равногранного тетраэдра $ABCD$ параллелепипед (рис. 286). В равногранном тетраэдре противоположные ребра между собой равны, поэтому все грани описанного параллелепипеда – прямоугольники. Например, $BA = CD = C_1D_1$, а поэтому AC_1BD_1 – прямоугольник.

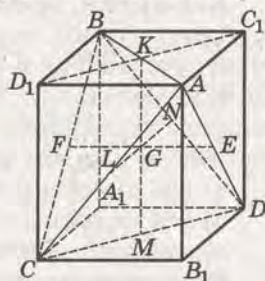


Рис. 286

Как видим, вокруг равногранного тетраэдра описан прямоугольный параллелепипед. Средние линии KM , LN , EF равногранного тетраэдра соединяют центры противоположных граней прямоугольного параллелепипеда, следовательно, они попарно перпендикулярны: $KM \perp LN \perp EF$. Каждая средняя линия перпендикулярна и к двум граням параллелепипеда, а следовательно, и к тем двум ребрам тетраэдра, которые лежат в этих гранях: $KM \perp AB$ и CD , $LN \perp BD$ и AC , $EF \perp AD$ и BC .

Можно и иначе доказать это утверждение. В равногранном тетраэдре четырехугольники $KLMN$, $NELF$, $KEMF$ – ромбы, поэтому их диагонали KM , NL , EF (они являются средними линиями тетраэдра) попарно перпендикулярны.

А если $KM \perp NL$ и $KM \perp FE$, то $KM \perp (ELFN)$, AB и CD параллельны плоскости $ELNF$, следовательно, $KM \perp AB$ и $KM \perp CD$.

11. Повернем равногранный тетраэдр $ABCD$ на 180° вокруг его средней линии KM (рис. 287). Поскольку $KM \perp AB$, $KM \perp CD$ и $AK = KB = CM = MD$, то вследствие такого поворота вершины A и B , C и D поменяются местами и тетраэдр совпадет сам с собой. При этом совпадут трехгранные углы A и B , C и D , медианы AG_A и BG_B , CG_C и DG_D , высоты AH_A и BH_B , CH_C и DH_D , отрезки AG и BG , CG и DG и т. д.

Если повернуть данный тетраэдр на 180° вокруг средней линии NL , то поменяются местами вершины A и C , B и D .

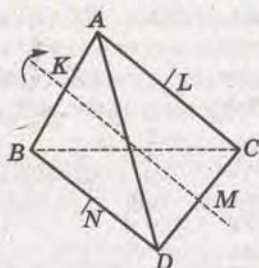


Рис. 287

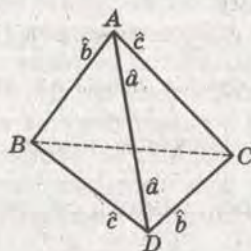


Рис. 288

Как видим, вращением равногранного тетраэдра вокруг его средних линий можно добиться, чтобы любой его трехгранный угол совпал с каждым из трех других. То же можно сказать и о медианах, высотах, радиусах вписанных и описанных шаров, противоположных двугранных углах и т. п. Следовательно, в каждом равногранном тетраэдре:

- а) все высоты равны между собой;
- б) все медианы равны;
- в) все трехгранные углы равны (рис. 288);
- г) двугранные углы при противоположных ребрах равны;
- д) центроид является центром вписанного и описанного шаров.

Правильны и обратные утверждения. Докажите их самостоятельно.

12. В каждом равногранном тетраэдре (и только в равногранном) центры вписанной и описанной сфер совпадают с центроидом тетраэдра.

Первая часть этого утверждения следует из рассуждений, приведенных в п. 11. Поэтому достаточно доказать вторую часть. Для этого из общего центра O вписанной в тетраэдр $ABCD$ и описанной вокруг него сфер опустим перпендикуляры OO_A , OO_B , OO_C и OO_D на все грани тетраэдра (рис. 289). Эти

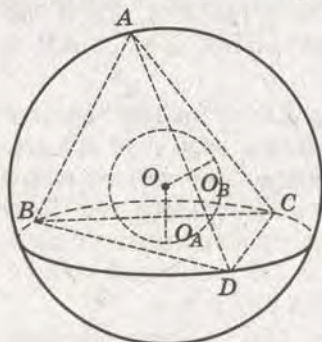


Рис. 289

перпендикуляры как радиусы вписанной сферы имеют равные длины. Следовательно, все грани тетраэдра равноудалены от O . Поэтому окружности, описанные вокруг его граней, также равны между собой. А в одинаковых окружностях на равные дуги опираются равные вписанные углы:

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}, \widehat{BAD} = \widehat{BCD}, \\ \widehat{BAC} = \widehat{BDC}.$$

$$\text{Но } \widehat{CBD} + \widehat{BCD} + \widehat{BDC} = 180^\circ,$$

поэтому

$$\widehat{CAD} + \widehat{BAD} + \widehat{BAC} = 180^\circ,$$

т. е. сумма плоских углов трехгранного угла A равна 180° .

Аналогично можно доказать, что сумма плоских углов каждого из других трехгранных углов тетраэдра равна 180° . А такое свойство, как мы знаем из п. 11, имеет только равногранный тетраэдр.

Рассмотрим рисунок 290. Пусть вписанный в равногранный тетраэдр $ABCD$ шар с центром O касается грани ACD в точке O_B . Тогда O_B — центр описанной вокруг треугольника ACD окружности. Из прямоугольного треугольника AOO_B следует:

$$OO_B^2 = AO^2 - AO_B^2, \text{ или}$$

$$r^2 = R^2 - \rho^2 = R^2 - \frac{r^2}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

откуда

$$\frac{R^2}{r^2} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Такая зависимость существует между радиусами шаров, вписанного в равногранный тетраэдр и описанного вокруг него.

Следствие. Радиус вписанного в равногранный тетраэдр шара не больше $\frac{1}{3}$ радиуса шара, описанного вокруг этого тетраэдра.

13. Все четыре высоты равногранного тетраэдра равноудалены от его центроида.

Опустим из центроида G равногранного тетраэдра $ABCD$ на его высоты AA_h , BB_h , CC_h , DD_h перпендикуляры GA_G , GB_G , GC_G , GD_G (рис. 291). Тогда $\triangle AA_G G \sim \triangle AA_h G_A$, причем $AG : AG_A = 3 : 4$. Следовательно, $AA_G = \frac{3}{4} AA_h$. Так же можно доказать, что $BB_G = \frac{3}{4} BB_h$.

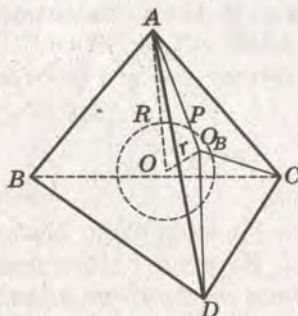


Рис. 290

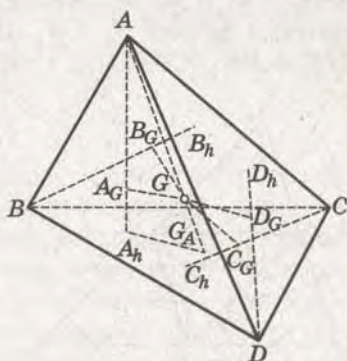


Рис. 291



и т. п. Но в равногранном тетраэдре все высоты равны между собой: $AA_G = BB_G = CC_G = DD_G$. Кроме того, $AG = BG = CG = DG$, потому что это радиусы описанного шара. Как видим,

$$\triangle AA_G G = \triangle BB_G G = \triangle CC_G G = \triangle DD_G G.$$

Тогда

$$GA_G = GB_G = GC_G = GD_G,$$

что и надо было доказать.

Из этих рассуждений следует, что *центроид G равногранного тетраэдра является центром сферы, которая касается всех его высот.* Точки касания делят каждую высоту тетраэдра в отношении $1 : 3$, считая от основания.

Из прямоугольного треугольника AA_GG определим радиус R этой сферы:

$$R_h^2 = AG^2 - AA_G^2.$$

Ho

$$AG = R \text{ и } AA_G = \frac{3}{4}h_a = 3r.$$

Поэтому

$$R_h^2 = R^2 - 9r^2.$$

14. В равногранном тетраэдре ортоцентр любой грани и основание высоты тетраэдра, опущенной на эту грань, симметричны относительно центра окружности, описанной вокруг этой грани.

Рассмотрим развертку равногранного тетраэдра $ABCD$ (рис. 292). Пусть O_A — центр окружности, описанной вокруг грани BCD . H_A — ортоцентр грани, а A_h — основание высоты тетраэдра, опущенной на эту грань. Понятно, что A_h — ортоцентр $\triangle A_1A_2A_3$. Пусть прямые A_1A_h и DH_A пересекают BC в точках E_1 и E_2 , а прямые A_3A_h и CH_A пересекают BD соответственно в точках N_1 и N_2 . Поскольку A_1BDC — параллелограмм, то $\triangle A_1BE_1 = \triangle CDE_2$. Следовательно, $BE_1 = CE_2$ и середина E

отрезка BC делит пополам E_1E_2 . Аналогично можно доказать, что середина N отрезка BD делит пополам отрезок N_1N_2 . Тогда O_A — точка пересечения средних линий трапеций $E_1E_2H_A A_h$ и $N_1N_2H_A A_h$ — лежит на середине общей стороны $H_A A_h$ этих трапеций. Поэтому точки H_A и A_h симметричны относительно O_A .

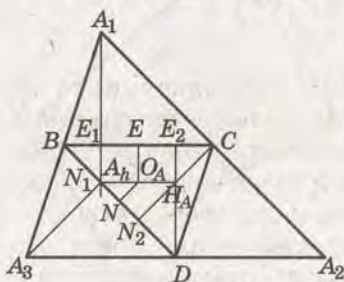


Рис. 292

15. Пусть A_h – основание высоты, опущенной на грань BCD равногранного тетраэдра $ABCD$ (рис. 293), а H_A и O_A – ортоцентр этой грани и центр описанной вокруг нее окружности. Как показано выше, $H_A O_A = O_A A_h$. Следовательно, прямая $H_A G$ пересекает высоту тетраэдра AA_h в точке A_1 так, что $A_1 A_h = 2GO_A$. Но GO_A – радиус вписанного шара, он равен $\frac{1}{4} AA_h$ (докажите это). Тогда

$$A_1 A_h = 2GO_A = 2 \cdot \frac{1}{4} AA_h = \frac{1}{2} AA_h,$$

то есть A_1 – середина высоты AA_h .

Центроид G – середина гипотенузы $A_1 H_A$ прямоугольного треугольника $A_1 A_h H_A$, поэтому $GA_1 = GA_h = GH_A$. Как видим, точка G равноудалена от ортоцентра грани H_A , основания высоты тетраэдра A_h и середины этой высоты A_1 .

Если повернуть данный тетраэдр на 180° вокруг его средней линии KM , то высота BB_h совпадет с высотой AA_h , а центроид G не изменит своего положения. Значит, точки B_h , B_1 , H_B находятся от центроида G на таких же расстояниях, как и точки A_h , A_1 , H_A . Повернув данный тетраэдр на 180° вокруг средней линии LN , убеждаемся, что ортоцентры всех граней, основания и середины всех высот данного тетраэдра равноудалены от его центроида G .

Следовательно, в равногранном тетраэдре ортоцентры всех граней, основания и середины всех его высот лежат на одной сфере.

Назовем ее сферой двенадцати точек равногранного тетраэдра.

Радиус этой сферы R_{12} можно определить из прямоугольного треугольника $A_1 A_G G$, где $A_1 A_G = r$, $A_G G = R_h$ (см. п. 13). Отсюда

$$R_{12}^2 = A_1 G^2 = r^2 + R_h^2 = R^2 - 8r^2,$$

$$R_{12} = \sqrt{R^2 - 8r^2}.$$

Если все грани тетраэдра – правильные треугольники, то основания высот тетраэдра совпадают с ортоцентрами граней и центрами описанных вокруг них окружностей. В этом случае сфера двенадцати точек касается граней тетраэдра, т. е. является вписанной сферой. Во всех иных случаях сфера двенадцати точек равногранного тетраэдра пересекает плоскости его граней по равным окружностям, центры которых совпадают с центрами окружностей, описанных вокруг граней тетраэдра.

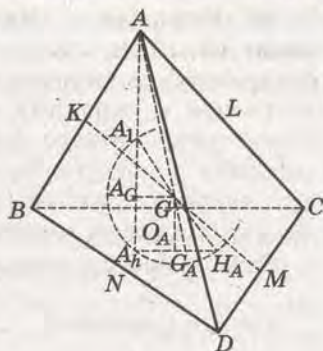


Рис. 293



16. Отдельным видом равногранного тетраэдра является правильный тетраэдр. Правильный тетраэдр имеет шесть плоскостей симметрии (которые проходят через каждое ребро тетраэдра и середину противоположного ребра), четыре оси симметрии третьего порядка (каждая из них проходит через вершину и центр противоположной грани) и три оси симметрии второго порядка (они проходят через середины противоположных ребер тетраэдра).

Если ребро правильного тетраэдра равно a , то его

высота (медиана) $h = \frac{a\sqrt{6}}{3};$

средняя линия $n = \frac{a\sqrt{2}}{2};$

радиус вписанного шара $r = \frac{a\sqrt{6}}{12};$

радиус описанного шара $R = \frac{a\sqrt{6}}{4};$

радиус внешневписанного шара $r_A = \frac{a\sqrt{6}}{6};$

площадь поверхности $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$

объем $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};$

плоский угол $\alpha = 60^\circ;$

двугранный угол $\hat{a} = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5^\circ;$

трехгранный угол $A \approx 0,55$ стерадиан.



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ



Докажите утверждения 1531–1542.

- 1531.** Если соединить отрезками центры окружностей, описанных вокруг граней равногранного тетраэдра, то образованный этими отрезками тетраэдр также будет равногранным.
- 1532.** В равногранном тетраэдре синусы двугранных углов относятся как длины соответствующих им ребер, т. е.

$$\frac{\sin \hat{a}}{a} = \frac{\sin \hat{b}}{b} = \frac{\sin \hat{c}}{c}.$$



1533. Сумма косинусов всех двугранных углов равногранного тетраэдра равна 2.
1534. Если все грани тетраэдра имеют равные периметры, то тетраэдр равногранный.
1535. В каждом равногранном тетраэдре:
- $\cos \hat{a} \cos \hat{b} \cos \hat{c} \leq \frac{1}{27}$;
 - $\sin^2 \frac{\hat{a}}{2} + \sin^2 \frac{\hat{b}}{2} + \sin^2 \frac{\hat{c}}{2} = 1$;
 - $\sin \frac{\hat{a}}{2} + \sin \frac{\hat{b}}{2} + \sin \frac{\hat{c}}{2} = 1$;
 - $\cos \hat{a} = 1 - 2\operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma$;
 - $A = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} - \pi$;
 - $n_a^2 n_b^2 + n_a^2 n_c^2 + n_b^2 n_c^2 = 4S^2$;
 - $n_a n_b n_c = 3V$.
1536. В равногранном тетраэдре радиус вневписанного шара равен диаметру вписанного.
1537. Квадрат диаметра описанного вокруг равногранного тетраэдра шара равен сумме квадратов всех средних линий этого тетраэдра.
1538. Из всех тетраэдров, описанных вокруг шара с радиусом r , в равногранном тетраэдре произведение высот наименьшее.
1539. Вписанный в равногранный тетраэдр шар касается всех граней восьмигранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра.
1540. Сумма квадратов расстояний от всех вершин равногранного тетраэдра до точки X , взятой на вписанной в него сфере, не зависит от положения точки X на сфере.
1541. Вписанный в равногранный тетраэдр шар касается его граней в точках, которые являются центрами окружностей, описанных вокруг его граней.
1542. Каждую грань правильного тетраэдра из середины высоты, опущенной на эту грань, видно под прямым трехгранным углом.
1543. Найдите косинус угла наклона ребра PA правильного тетраэдра $PABC$ к его грани ABC .
1544. Точка K — середина ребра PB правильного тетраэдра $PABC$. Найдите угол наклона прямой AK к плоскости грани ABC .



ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Геометрия – одна из самых древних наук. Исследовать разные пространственные формы издавна побуждала человека его практическая деятельность.

Первые геометрические открытия были сделаны египетскими, шумеро-вавилонскими, китайскими и другими учеными Древнего мира. Совершались они сначала опытным путем, без логических доказательств.

Как наука геометрия впервые сформировалась в Древней Греции, когда геометрические закономерности и зависимости, найденные сначала опытным путем, были собраны в систему и доказаны как теоремы. Один из математических трудов тех далеких времен дошел и до нас. Это – «Начала» александрийского математика Евклида (ок. 365 – ок. 300 г. до н. э.).

Развивалась геометрия и после Евклида. В частности, Архимед (III в. до н. э.) предложил новые способы вычисления площадей и объемов геометрических тел, Аполлоний (III–II в. до н. э.) исследовал сечения конуса, Менелай (I–II в.) развил геометрию и тригонометрию сферы. Но в последующие века вплоть до эпохи Возрождения в Европе геометрия не развивалась. Только во второй половине прошлого тысячелетия здесь опять были сделаны геометрические открытия. Создавались новые методы исследования свойств геометрических фигур и появлялись не исследованные ранее области древней науки: аналитическая, проективная, начертательная, дифференциальная геометрии.

Совершим краткий исторический обзор тем, рассмотренных в этом учебнике.

Координаты и векторы. Метод координат. Впервые понятия координат (астрономических и географических, которые назывались широтой и долготой) появились в работах древнегреческих ученых Эратосфена (III в. до н. э.) и Гиппарха (II в. до н. э.). Со временем метод географических координат был усовершенствован и трансформирован на другие системы координат точек на плоскости и в пространстве. Основоположниками метода координат считаются П. Ферма и Р. Декарт. П. Ферма рассматривал только положительные значения x и y , а потому его система координат состояла фактически из одного первого квадранта. У Ф. Декарта система координат также состояла из одной фиксированной оси (абсцисс), но в отличие от П. Ферма он рассматривал точки с положительными и отрицательными ординатами. С помощью метода координат Ф. Декарта подавалась геометрическая интерпретация отрицательных чисел. Таким способом





Декарт Рене (1596–1650)

Выдающийся французский философ, математик, физиолог, физик. Р. Декарт ввел метод координат, понятие переменной, заложил основы аналитической геометрии, ввел современные обозначения степеней, знаки «+» и «-» для обозначения положительных и отрицательных чисел. Более известен как философ, основатель картезианства. Против его взглядов резко выступали католики и протестанты. Его труды, в частности «Рассуждение о методе», «Начала философии», «Страсти души», раньше были внесены в «Индекс запрещенных книг».

значения отрицательных и положительных чисел уравнивались.

Метод координат П. Ферма разработал раньше Р. Декарта, но последний первым опубликовал свои результаты. Термины «абсцисса», «ордината» и «аппликата» имеют греческое происхождение и использовались в теории о конических сечениях. В современном понимании их начал использовать Г. Лейбниц, он также ввел термин «координаты», чтобы подчеркнуть равноправие «абсциссы» и «ординаты». Но общепринятыми эти термины стали лишь с середины XVIII в. Термин «ось абсцисс» ввел И. Барроу (в 1670 г.), а термин «ось ординат» — значительно позже Г. Крамер (в 1750 г.). Сначала метод координат использовали для плоскости, а в XVIII в. И. Бернулли, А. Клеро и другие математики распространили его на трехмерное пространство. Вывел уравнение плоскости и решил большинство задач трехмерной аналитической геометрии Г. Монж. Систематизировал аналитическую геометрию пространства Л. Эйлер.

Векторы в математику входили из трех источников: исчисления отрезков, исследования векторных величин и теории кватернионов. Теорию направленных отрезков на плоскости и в пространстве впервые изложил норвежский геодезист и картограф К. Вессель в труде «Опыт об аналитическом представлении направления и его применении, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников». Новое исчисление направленных отрезков К. Вессель строил почти так, как оно представляется в современных учебниках: вводил понятия направленного отрезка, базисной единицы, направления (отклонения) отрезка, формулировал правила для выполнения действий с направленными отрезками и показы-



вал их применение на плоскости и в пространстве. К. Весселю также принадлежит первая попытка векторного построения тригонометрии со строгим обоснованием всех ее формул.

Векторные величины относительно проблем механики исследовал английский математик Д. Валлис в труде «Механика, или Геометрический трактат о движении». Геометрическое сложение и вычитание векторов Д. Валлис осуществлял по правилу параллелограмма и параллелепипеда. Рассматривая разложение заданной силы на компоненты, он уточнял, что выполнить такое действие можно бесконечным количеством способов.

Понятие «вектор» ввел в 1846 г. ирландский математик У.Р. Гамильтон, рассматривая векторы в связи с кватернионами (числами вида $a + bi + cj + dk$, где i, j, k – мнимые единицы). Он писал: «Отрезок AB , у которого рассматривается не только длина, но и направление, называется вектором. Его начальная точка называется origin, а конечная – term. Вектор AB , ... – разность двух своих предельных точек». Обозначение $\vec{r}$ предложил в 1887 г. О. Коши.

Одним из первых отечественных ученых, которые разрабатывали теорию векторов, был профессор Киевского университета П. Ромер. Систематическое и детальное изложение векторного исчисления и теории кватернионов он осуществил в докторской диссертации «Основные начала метода кватернионов» (1866 г.). Среди отечественных ученых геометрическое направление в формировании теории векторного исчисления представлял профессор Киевского университета В. Ермаков. В Киеве в 1887 г. он издал труд «Теория векторов на плоскости. Применение к исследованию конических сечений». В 1890 г. в Одессе Д.Н. Зейлигер опубликовал книгу «Теория векторов».



Гамильтон Уильям Роуэн
(1805–1865)

Ирландский математик. Читать научился в 3 года, в 10 лет стал студентом, в 12 лет знал 10 языков. С 22 лет – профессор астрономии и директор астрономической обсерватории. Его основные труды касаются механики, дифференциальных уравнений и функционального анализа. Исследовал числовые множества, создал систему кватернионов, ввел термин «вектор». В геометрии исследовал волновые поверхности, в алгебре – группы, одну из которых называют группой Гамильтона.

Обобщенный взгляд на векторы как элементы векторного пространства предложил Г. Вейль. *Векторным пространством* называется любое множество, для элементов которого определены операции сложения и умножения на число (при этом должны выполняться 4 закона сложения и 4 закона умножения). Примеры векторных пространств: множество всех пар точек пространства; множество всех троек действительных чисел; множество всех параллельных переносов плоскости или пространства и т. п.

Понятие *n*-мерного пространства введено в математику почти одновременно с понятием вектора – в середине XIX в.

Чтобы задать точку на плоскости (в двухмерном пространстве), достаточно указать две ее координаты: $A(a_1; a_2)$. Чтобы задать точку в трехмерном пространстве, надо указать три ее координаты: $A(a_1; a_2; a_3)$. Между всеми точками трехмерного пространства и упорядоченными тройками действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие: каждой точке пространства соответствует единственная тройка чисел, а каждой тройке чисел – единственная точка. Поэтому математики множество всех пар действительных чисел почти отождествляют с плоскостью (двухмерным пространством), а множество всех троек действительных чисел – с трехмерным пространством. Логично множество всех упорядоченных четверок действительных чисел назвать *четырёхмерным пространством*. Рассуждая по аналогии, договорились, что $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$, $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$ – точки четырёхмерного пространства.

$C\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2}; \frac{a_4+b_4}{2}\right)$ – середина отрезка AB ,

$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + (a_4 - b_4)^2$ – квадрат длины этого отрезка и т. п. Вводя эти и некоторые другие понятия, математическими методами исследуют свойства пространства созданного таким способом. Эти исследования оказались достаточно содержательными и полезными не только для математики. Например, в механике, кроме трех пространственных координат x, y, z , рассматривают и четвертое «измерение» – время t , которое входит во все механические соотношения.

Подобным способом можно ввести пятимерное и другие *n*-мерные пространства. Их при $n \geq 4$ называют *многомерными пространствами*. История возникновения учения о многомерных пространствах достаточно интересна. Философы и другие специалисты, далекие от математики, вначале критиковали такие исследования. Впоследствии они изменили свои



Гулак Николай Иванович
(1822–1899)

Родился на Полтавщине, работал в канцелярии Киевского генерал-губернатора. Один из основателей Кирилло-Мефодиевского братства, за что в 1847 г. был арестован. Только через 12 лет вернулся в Украину, работал учителем математики, географии, русского языка в Одессе, Керчи, Ставрополе, в Грузии. В 1877 г. в Тифлисе опубликовал монографию «Попытка геометрии четырех измерений». Еще один труд «Этюды о трансцендентных уравнениях» на французском языке напечатал в Одессе.

Р. Иванычук написал о Н. Гулаке роман «Четвертое измерение».

взгляды, кое-кто стал даже утверждать, что четырехмерное пространство существует в реальном мире. Допускали даже существование «медиумов», которые могут перемещать тела из реального трехмерного пространства в четырехмерное и наоборот. Замечательный материал для фантастов! Но математики, которые создали и хорошо знают многомерные пространства, воспринимают их практически и реальнее.

Многогранники. Понятия «куб», «параллелепипед», «призма», «пирамида», «тело» были хорошо известны древнегреческим геометрам. Вот несколько определений из книги XII «Начал» Евклида: «Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину. Границами тела являются поверхности... Пирамида – это тело, ограниченное плоскостями, проведенными от какой-либо плоскости до точки, которая лежит вне этой последней плоскости. Призма – это тело, ограниченное плоскостями, из которых две противоположные равны, подобны и параллельны, остальные же являются параллелограммами... Куб – это тело, ограниченное шестью равными квадратами».

Правильные многогранники были известны даже предшественникам Евклида. В «Началах» доказано, что существует только 5 видов правильных многогранников, и показано, как можно построить каждый из них. Архимед открыл существование 13 видов полуправильных многогранников.

Тела вращения были известны еще древнегреческим геометрам. В «Началах» Евклида сформулированы такие определения: «Шар описан полукругом, который вращается на неподвижном диаметре... Конус описан прямоугольным треугольником, который вращается вокруг неподвижной перпен-





Кавальери Бонаventura (1598–1647)

Итальянский математик, преподаватель Болонского университета, автор «Геометрии», в которой изложен метод неделимых. Он умел решать задачи, которые сейчас решают, вычисляя интегралы $\int_a^b x^n dx$ при натуральных $n < 10$. Другие его труды «Сто разных задач...», «Тригонометрия плоская и сферическая, линейная и логарифмическая».

дикулярной стороны. Цилиндр образуется при вращении прямоугольника вокруг неподвижной стороны».

Объемы некоторых многогранников умели находить еще в Древнем Египте. В одном папирусе, который дошел до наших дней, кроме других, решается задача об определении объема усеченной четырехугольной пирамиды высотой 6 и со сторонами основания 4 и 2. Архимед умел находить объемы даже параболоида, гиперболоида и эллипсоида вращения, а также площади поверхностей цилиндра, конуса, шара.

Новые методы определения объемов геометрических тел разработал итальянский математик Б. Кавальери. Его рассуждения были нестрогими, интуитивными, потому что ссылались на еще не доказанные утверждения, считая их очевидными. Только впоследствии они были доказаны методами математического анализа. В учебнике основное утверждение Кавальери принято за аксиому, поэтому все теоремы об определении объемов доказаны корректно.

Строгую современную теорию объемов, площадей и других



Лебег Анри Леон (1875–1941)

Французский математик, доктор философии. Один из основателей современной теории функций, создал теорию меры, ввел новое понимание интеграла – интеграл Лебега. Новое понятие интеграла дает возможность интегрировать достаточно широкий класс функций, а следовательно, решать много важных прикладных задач. По вопросам средней школы опубликовал книги «Лекции о геометрических построениях», «Конические сечения», «Об измерении величин».



Георгий Феодосьевич Вороной
(1868–1908)

Украинский математик. Родился в с. Журавка (Черниговская обл.). Исследовал проблемы геометрической теории чисел и геометрии многогранников. Математики всего мира все чаще используют понятия: алгоритм Вороного, клетки Вороного, метод Вороного, многоугольники Вороного, диаграммы Вороного, разбиение Вороного, мозаика Вороного и т. п.

величин разработал известный французский математик А. Лебег. На основе общего понятия меры он ввел новое, более обобщенное понятие интеграла (теперь называют интегралом Лебега).

Много сделал для развития школьной геометрии выдающийся украинский математик **М. В. Остроградский** (1801–1862). Он в 1855–1860 гг. напечатал в трех частях книгу «Руководство начальной геометрии», всего 748 страниц. Книга переиздана на украинском языке в 2001 г. в Тернополе.

Много сделал для развития геометрии известный украинский математик **Г. Ф. Вороной** – творец геометрической теории чисел. В частности, он исследовал разные заполнения пространства равными многогранниками.

Значительный вклад в развитие геометрической науки сделали украинские математики М. Е. Ващенко-Захарченко (1825–1912), С. О. Шатуновский (1859–1929), А. С. Смогоржевский (1896–1969), Н. И. Кованцов (1924–1988), А. В. Погорелов (1919–2002) и многие другие.

Как видим, большинство свойств геометрических фигур, изучающихся в современной школе, были известны и 2 тыс. лет тому назад. Со временем их дополняли новыми открытиями, передавали из поколения в поколение, потому что эти сведения очень нужны людям. Известный архитектор Ле Корбюзье писал: «Никогда еще до этого времени мы не жили в такой геометрический период. Стоит поразмышлять о прошлом, вспомнить то, что было и раньше, и мы будем потрясены, увидев, что окружающий нас мир – это мир геометрии, чистый, истинный, безукоризненный в наших глазах. Все вокруг – геометрия».

В будущем окружающий нас мир, безусловно, изменится, но геометрия останется. Даже еще больше обогатится новыми сведениями и методами, потому что она очень нужна людям.

ТЕМЫ ДЛЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

1. Аналогии в геометрии.
2. Геометрия и логика.
3. Геометрия и кристаллография.
4. Геометрия и архитектура.
5. Геометрия и искусство.
6. Геометрические построения в пространстве.
7. Геометрические пространства.
8. Геометрические преобразования и группы.
9. Геометрия и теория вероятностей.
10. Фракталы.
11. Геометрические места точек пространства.
12. Движения в пространстве.
13. Инверсии на плоскости и в пространстве.
14. Поверхности вращения и винтовые поверхности.
15. Лист Мебиуса.
16. Периодические поверхности.
17. Геометрическая теория чисел.
18. Стереометрические экстремальные задачи.
19. Пространственные обобщения теоремы Пифагора.
20. Окружность Эйлера и ее пространственные аналоги.
21. Тетраэдр и сфера.
22. Ортоцентрические тетраэдры.
23. Равногранные тетраэдры.
24. Прямоугольные тетраэдры.
25. Полуправильные многогранники.
26. Многогранники на полотнах известных художников.
27. Тор и его свойства.
28. Начертательная геометрия.
29. Проективная геометрия.
30. Тела вращения и токарное дело.
31. Тела вращения и гончарство.
32. Заполнение пространства равными тетраэдрами.
33. Заполнение пространства равными многогранниками.
34. От циркуля до штангенциркуля.
35. Создание украинской геометрической терминологии.
36. История школьных учебников по геометрии.
37. Учебник по геометрии М.В. Остроградского.
38. Стереометрия помогает планиметрии.
39. Стереометрические задачи на олимпиадах.



ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аксиоми для нащадків: Українські імена у світовій науці / упоряд. О.К. Романчук. – Львів, 1992.
2. Бевз В.Г. Історія математики. – Харків, 2006.
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика – К., 2005.
4. Бевз Г.П. Математика в школах України. – К., 2009.
5. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К., 2009.
6. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К., 1973.
7. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Статистика, ймовірність, комбінаторика у старшій школі. – Харків, 2008.
8. Василенко О. Серенада математиці. – Харків, 2003, 2009, 2011.
9. Василенко О.О. Жінки й математика. – Харків, 2008.
10. Вірченко Н.О. Математика в афоризмах і висловлюваннях. – К., 1974.
11. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. – Харків, 2008. – Кн. 1, 2.
12. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII–VIII классы. – М., 1982.
13. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX–X классы. – М., 1983.
14. Демьянов В.П. Геометрия и Марсельеза. – М., 1979.
15. Игнатьев Е.И. Хрестоматия по математике. – Ростов-на-Дону, 1995.
16. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К., 1980.
17. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М., 1991.
18. Конфорович А.Г. Колумби математики. – К., 1982.
19. Конфорович А., Сорока М. Остроградський. – К., 1980.
20. Конфорович А.Г. У пошуках інтеграла. – К., 1990.
21. Лю Кі. Ломиголовки. – К., 1996.
22. Математика в школі: журнал.
23. Математика у школах України: журнал.
24. Математика: газета.
25. Математика після уроків / упоряд. І.С. Маркова. – Харків, 2004.
26. Математична хрестоматія / За редакцією М.І. Кованцова. – К., 1977.
27. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К., 1991.
28. Тадеєв В.А. От живописи к проективной геометрии. – К., 1988.
29. Тадеєв В.О. Геометрія, 11 клас. – Тернопіль, 2004.
30. Тадеєв В.О. Математика. Тлумачний словник-довідник. – Тернопіль, 1999.
31. У світі математики. – К., 1968–1991. – Вип. 1–20.
32. У світі математики: журнал для школярів.
33. Шафаревич И. Есть ли у России будущее? – М., 1991.
34. Шляхами математики / упоряд. Т.М. Хмара. – К., 1999.
35. Шмигевський М.В. Видатні математики. – Харків, 2004.
36. Энциклопедический словарь юного математика. – М., 1985.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Прямоугольный треугольник

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha; \quad a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Пифагора);}$$

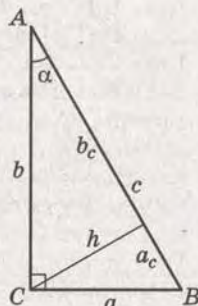
$$\frac{b}{c} = \cos \alpha; \quad a^2 = a_c \cdot c;$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha; \quad b^2 = b_c \cdot c;$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha; \quad h^2 = a_c \cdot b_c;$$

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch; \quad S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha; \quad h = \frac{ab}{c};$$

$$R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$

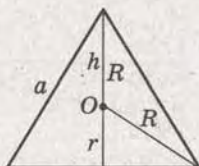


Равносторонний треугольник

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{1}{3}h; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = \frac{2}{3}h; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$R = 2r; \quad h = R + r.$$



Произвольный треугольник

$$S = \frac{1}{2}ah; \quad S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma;$$

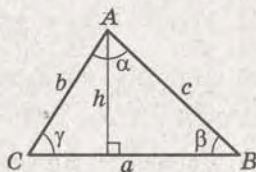
$$p = \frac{a+b+c}{2},$$

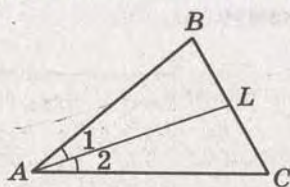
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона);}$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{a}{2 \sin \alpha};$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \text{ (теорема косинусов);}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ (теорема синусов).}$$

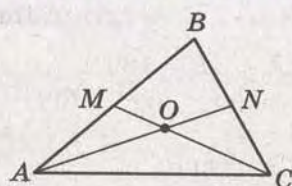




AL – биссектриса

1) $\angle 1 = \angle 2$;

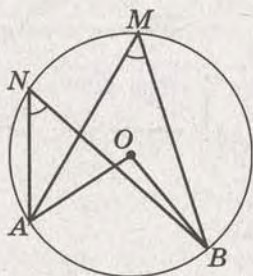
2) $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.



AN, CM – медианы

$AO : ON = 2 : 1$.

Окружность и круг

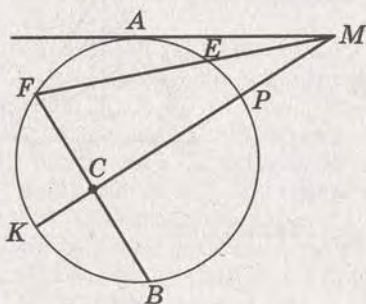


$C = 2\pi r$;

$S = \pi r^2$.

$\angle AMB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$;

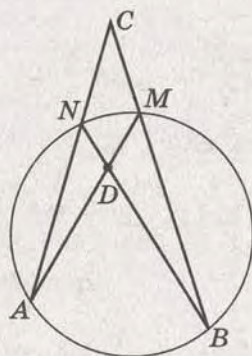
$\angle AMB = \angle ANB$.



$AM^2 = ME \cdot MF$;

$ME \cdot MF = MP \cdot MK$;

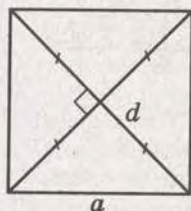
$FC \cdot CB = KC \cdot CP$.



$\angle ADB = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{MN})$;

$\angle ACB = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{MN})$.

Квадрат



$d = a\sqrt{2}$; $r = \frac{a}{2}$;

$P = 4a$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2} d^2$.

Параллелограмм

$$\angle A + \angle B = 180^\circ;$$

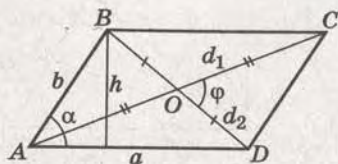
$$P = 2(a + b);$$

$$S = ah;$$

$$S = absin\alpha;$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi;$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$



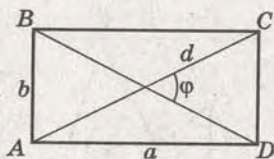
Прямоугольник

$$AC = BD;$$

$$P = 2(a + b);$$

$$S = ab;$$

$$S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi; \quad R = \frac{1}{2}d.$$



Ромб

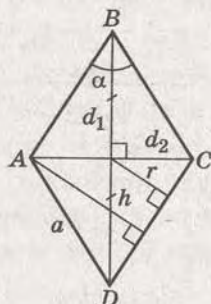
$$P = 4a;$$

$$S = ah;$$

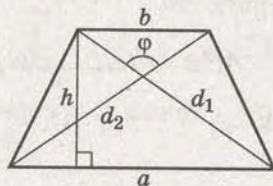
$$S = a^2 \sin\alpha;$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2;$$

$$r = \frac{1}{2}h; \quad r = \frac{d_1 d_2}{4a}.$$

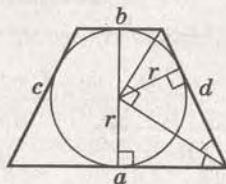


Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi;$$



$$a + b = c + d;$$

$$h = 2r.$$



Правильный многоугольник



Сумма углов: $180(n-2)$; $P = na$;

$$\angle A = \frac{180(n-2)}{n};$$

$$S = \frac{1}{2}arn;$$

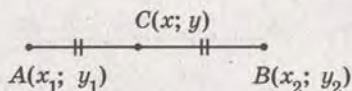
$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{n};$$

$$S = \frac{1}{2}R^2n \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n};$$

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Координаты на плоскости



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности с центром $O(a; b)$ радиуса R .

Уравнение прямой

$ax + by + c = 0$ – общее уравнение прямой;

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через точки

$A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$;

$y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом;

для прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$:

$k_1 = k_2$ – условие параллельности;

$k_1 \cdot k_2 = -1$ – условие перпендикулярности;

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ – расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой

$ax + by + c = 0$.

Координаты в пространстве

Пусть даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ – координаты точки C – середины отрезка AB ;

$M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right)$ – координаты точки M , которая делит отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$;

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – длина отрезка AB ;

$ax + by + cz + d = 0$ – общее уравнение плоскости;

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n} = (a; b; c)$;

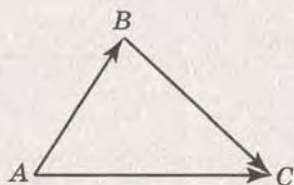
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$;

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (a; b; c)$;

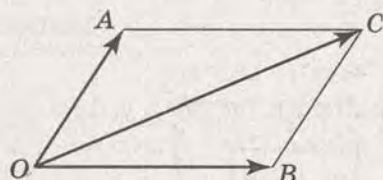
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ – уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M(a; b; c)$;

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ – расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

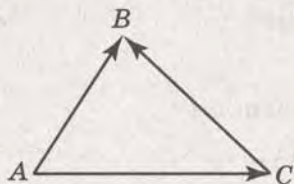
Векторы



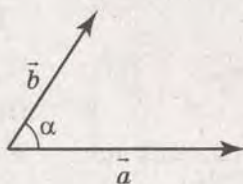
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ – сложение векторов по правилу треугольника.



$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ – сложение векторов по правилу параллелограмма.



$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$ – разность векторов.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2}.$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\vec{a} = \lambda \vec{b}$ – условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Векторы, заданные координатами

$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – координаты вектора $\overline{AB}$, где $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$.

Пусть $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$;

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2);$$

$$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1);$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k \text{ – условие коллинеарности ненулевых векто-}$$

ров $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

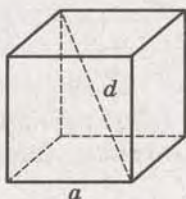
$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ – условие перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ – длина вектора } \vec{a} = (x; y; z);$$

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

МНОГОГРАННИКИ

Куб

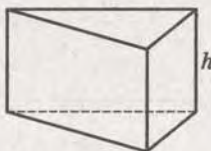


$$d = a\sqrt{3};$$

$$S_{\pi} = 6a^2;$$

$$V = a^3.$$

Прямая призма

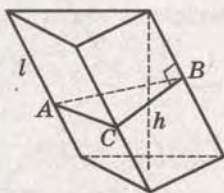


$$S_{\pi} = S_6 + 2S_0;$$

$$S_6 = P_0 \cdot h;$$

$$V = S_0 \cdot h.$$

Наклонная призма



ABC – перпендикулярное сечение.

$$S_{\pi} = S_6 + 2S_0;$$

$$S_6 = P_{\text{сеч}} \cdot l;$$

$$V = S_0 \cdot h.$$

Пирамида

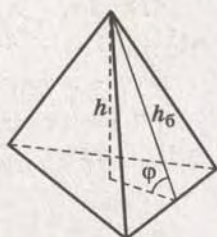
$$S_{\pi} = S_6 + S_o;$$

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot h.$$

Для правильной пирамиды $S_6 = \frac{1}{2} P_o \cdot h_6$,

где h_6 – апофема;

$$S_6 = \frac{S_o}{\cos \varphi}.$$



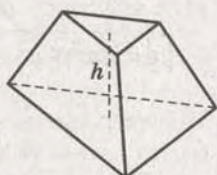
Усеченная пирамида

$S_{\pi} = S_6 + S_1 + S_2$, где S_1 и S_2 – площади оснований;

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

Для правильной усеченной пирамиды

$$S_6 = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h_6.$$



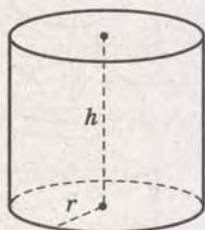
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Цилиндр

$$S_6 = 2\pi r h;$$

$$S_{\pi} = 2\pi r h + 2\pi r^2;$$

$$V = \pi r^2 h.$$

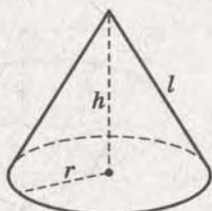


Конус

$$S_6 = \pi r l;$$

$$S_{\pi} = \pi r l + \pi r^2;$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$





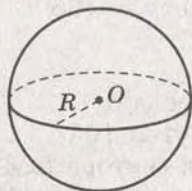
Усеченный конус



$$S_6 = \pi l(R + r);$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

Шар и сфера



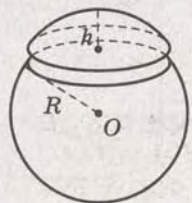
$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2;$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Сектор и сегмент

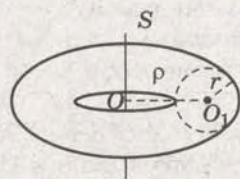


$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h;$$



$$V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

Тор



$$V_{\text{т}} = 2\pi^2 R r^2.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсцисса точки 6
- Апplikата точки 6
- Апофема пирамиды 152
- Биссектор двугранного угла 106
- Боковая поверхность конуса 191
 - пирамиды 152
 - призмы 136
 - цилиндра 184
- Боковые грани пирамиды 152
 - призмы 136
 - ребра пирамиды 152
- Большой круг шара 200
- Векторы 31, 33
 - компланарные 33
 - приложенные 33
 - противоположные 39
- Векторное пространство 304
- Вершина конуса 191
 - многогранника 129
 - многогранного угла 119
 - пирамиды 152
 - трехгранного угла 112
- Винтовое движение 85
- Вневписанный шар 289
 - второго рода 290
- Вписанные тела 209
- Высота конуса 191
 - пирамиды 152
 - призмы 136
 - цилиндра 185
 - шарового сегмента 202
- Геометрические преобразования 61
- Геометрическое тело 124
- Геометрия 302
- Гомотетия 90
- Грань двугранного угла 105
 - многогранника 129
 - трехгранного угла 112
- Группа симметрии 166
- Движение 61
 - второго рода 85
- Двугранный угол 105
- Действия над векторами 38
- Диагональ многогранника 129
 - параллелепипеда 144
- Диагональная плоскость 137
- Диагональное сечение пирамиды 152
 - призмы 137
- Диаметр тела 125
 - шара 200
- Длина вектора 32
- Додекаэдр правильный 165
- Измерения 144
- Икосаэдр правильный 165
- Касательная плоскость к конусу 191
 - цилиндру 185
 - шару 201
- Касательные сферы 202
- Комбинации тел 208
- Конус 191
 - прямой, круговой 194
- Координатные оси 6
 - плоскости 6
- Координаты вектора 31
 - точки 6
- Коэффициент гомотетии 90
- Кривые второго порядка 193
- Куб 144



- Линейный угол двугранного угла 105
- Метод координат 25
- Многогранник 129
- вписанный 209
 - выпуклый 130
 - полуправильный 166
 - правильный 164
- Многогранный угол 119
- – выпуклый 119
- Модуль вектора 32
- Начало координат 6
- Нормаль к плоскости 55
- Нулевой вектор 32
- Образующая конуса 191
- цилиндра 185
- Объем конуса 243
- куба 223
 - параллелепипеда 224
 - пирамиды 242
 - призмы 229
 - тела вращения 255
 - тора 262
 - цилиндра 229
 - шара 256
 - шарового сегмента 256
- Октаэдр правильный 165
- Описанные тела 209
- Орты 40
- Осевое сечение 154
- Основание конуса 193
- пирамиды 152
- Основания призмы 136
- цилиндра 184
- Ось абсцисс 6
- аппликата 6
 - конуса 191
 - ординат 6
 - симметрии 74
 - тела вращения 179
- Параллелепипед 144
- прямой 144
- Параллельный перенос 78
- Пирамида 152
- правильная 152
- Планиметрия 3
- Плоскость опорная 126
- симметрии 68
- Площадь поверхности 266
- конуса 192, 267
 - многогранника 130
 - пирамиды 153
 - призмы 137
 - сферического сегмента 268
 - сферы 268
 - тора 269
 - цилиндра 186, 267
- Поверхность тела 125
- вращения 180
- Поворот 73
- Подобные фигуры 92
- Полюса шара 200
- Правило параллелепипеда 39
- многоугольника 39
 - треугольника 38
- Преобразование подобия 91
- Призма 136
- наклонная 136
- Применение векторов 53
- координат 25
- Пространственная область 125
- теорема Пифагора 8
- Равные векторы 32
- фигуры 85
- Радиус конуса 191
- шара 200
 - цилиндра 184
- Развертка конуса 192
- многогранника 130
 - цилиндра 186
- Разложение вектора 40



Ребро двугранного угла 105
 — многогранника 129
 — призмы 136
 — трехгранного угла 112

Симметрия относительно
 плоскости 67
 — прямой 74
 — точки 62

Система координат 6
 — сферическая 27
 — цилиндрическая 27

Скалярное произведение
 векторов 46

Стерadian 120

Стереометрия 3

Сфера 18, 200

Сферический пояс 202

Телесный угол 119

Тело вращения 124

— геометрическое 179

Теорема Гульдина 261

— о трех косинусах 114

— Пифагора обобщенная 9

— Эйлера 131

Тетраэдр 152

— правильный 165

Тор 210

Трехгранный угол 112

— прямой 113

Угол между векторами 45
 — естественного уклона 194

Уравнение плоскости 18

— прямой 19

— сферы 18

Усеченная пирамида 154

Усеченный конус 192

Фигуры вращения 179

— подобные 92

Центр гомотетии 90

— правильного многогран-
 ника 164

— симметрии 63

— шара 124

Центроид тетраэдра 53

— n точек 26

Цилиндр 184

— круговой, прямой 186

Шар 124, 200

Шаровой сегмент 202

— сектор 202

Экватор шара 200

Эллипс 180



ОТВЕТЫ

15. $3\sqrt{6}$. 16. -4. 17. Нет. 19. (0; -2; 0). 22. в) Равнобедренный, $P = 6(1 + \sqrt{3})$, $S = 9\sqrt{2}$. 23. а) Квадрат, $S = 25$. 25. 60° .
26. $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$. 29. (-0,25; 0,25; 0). 30. (2; 2; 2) или (-2; -2; -2).
31. (3; 9; 0) или (2; 8; 0). 32. а) (0; 0; 0); (0; 0; 6); (0; 0; -4); (0; 0; $3 \pm \sqrt{33}$). 34. $B_1(0; 0; 2\sqrt{3})$, $D_1\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}; 0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ или $D_1\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3}; 0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; $B_2(0; 0; -2\sqrt{3})$, $D_2\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}; 0; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ или $D_2\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3}; 0; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. 35. а) Точки отрезка AB , где $A(6; 0; 0)$, $B(0; 0; 8)$; б) таких точек не существует. 46. $B(0; 9; -6)$.
47. $A(5; -4; 0)$, $B(-7; 5; 6)$. 48. 5; $\sqrt{70}$; $\sqrt{91}$. 50. $A(4; -2; 8)$; $C(0; -8; 4)$. 52. а) Да; б) нет. 54. $C(1; -3; 6)$; $D(6; 0; -1)$.
55. а) (-1; 2; 0); б) $\left(3; -\frac{3}{4}; 0\right)$. 56. $\left(\frac{1}{3}; 3; 3\right)$. 57. а) $a = -2$; $b = 2$.
58. $h = 3\sqrt{2}$; $S = 9\sqrt{2}$. 59. а) $\sqrt{2}$; б) 30° ; 30° ; 120° ; в) $2\sqrt{3}$. 61. 3.
62. а) $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$; б) (1; 2; 2). 63. б) $\left(2; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}; \frac{7-3\sqrt{3}}{2}\right)$.
65. $C(-7; -4; -1)$. 66. $\left(\frac{25}{8}; \frac{33}{8}; \frac{9}{4}\right)$. 67. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$. 68. $2\sqrt{3}$.
70. а) $SO = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$. 84. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ или $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. 85. (6; 0; 0) и (-2; 0; 0). 87. 8π .
88. а) $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$. 89. а) (1; -2; 1), $R = 5$.
92. $y - z = 0$. 93. $z = 4$. 94. $4x - 11y - 6z = 0$. 95. $M_z\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$; $M_y\left(\frac{4}{5}; 0; -\frac{1}{5}\right)$; $M_x\left(0; \frac{4}{7}; \frac{1}{7}\right)$. 98. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-2}{2}$. 99. (4; 7; 9).
100. $\left(-\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(-\frac{12}{7}; \frac{22}{7}; -\frac{3}{7}\right)$. 102. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. 103. $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 29$. 105. $a \in (-\infty; -8) \cup$



- $\cup (-2; 2) \cup (8; \infty)$ – общих точек нет, $a \in (-8; -2) \cup (2; 8)$ – пересекаются, $a = \pm 8$ – внутреннее касание, $a = \pm 2$ – внешнее касание. 109. $x + y + z - 2 = 0$. 112. Прямоугольный параллелепипед. 113. Нет. 114. $7\sqrt{2}\pi$. 115. $2 : 1$. 127. $D(6; 6; 6)$ или $D(-2; -2; -2)$, $h = 4\sqrt{3}$. 129. $2 : 3$. 130. а) Да. 131. $\frac{a\sqrt{17}}{6}$. 132. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. 133. $9\sqrt{3}$. 136. $6a^2$. 140. $3 : 1$. 142. $(2a \pm \sqrt{5b^2 - a^2}) : 5$. Желательно выполнить исследование. 143. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. 144. 3. 145. $2\sqrt{14}$ или $\sqrt{206}$. 162. $A(-8; 0; -1)$. 165. а) Да; б) нет. 166. $x = \pm 3$. 171. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ или $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 172. $(2; 4; 6)$ или $(6; 4; 2)$. 173. а) $(2; -8; 8)$. 175. $(-4; 1; 1)$. 176. б) $a = 3$ и $a = -1$; г) $a = -\frac{5}{3}$ и $a = 3$. 177. б) $m = -3$; в) $m = 2$; г) $m = 1$. 178. а) Нет; б) да. 179. а) Да; б) да. 180. Да. 203. $\sqrt{123}$ и $\sqrt{370}$. 205. $(2; 3; -1)$. 207. Да. 208. а) $k = -5$. 213. а) $x = 4$; $y = -3,5$; $z = 1$. 214. $(4; -4; -2)$. 215. $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$. 217. $P(2; 5; 0)$ или $P(6; -7; 4)$. 218. б) $a = -2$; в) $a = 1$. 219. $a = -2$; $b = \frac{1}{3}$. 220. а) Нет; б) да. 222. $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$. 233. а) 40° ; б) 130° ; в) 140° . 235. а) 72 ; б) -72 . 237. а) 16 ; в) 150 . 239. а) 45° ; б) 120° ; в) 135° ; г) 60° . 241. а) $x = -9$; в) $x = 1$; г) $x = -4$; $x = 3$. 242. 6. 243. а) 30° ; б) 135° . 244. а) 1; б) 5. 245. а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$; г) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{37}$. 250. $\arccos \frac{4}{9}$. 251. а) $D(-0,5; 0; 0)$. 252. $l = -10$. 254. а) 174; б) 0; в) 2. 256. $\pi - \arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$. 257. $(2; 2; 2)$ или $(-2; -2; -2)$. 258. а) $\arccos 0,7$; б) $\arccos 0,7$. 259. $\arccos \frac{5}{6}$; $\arccos \frac{2}{3}$; $\arccos \frac{1}{6}$; $\arccos \frac{1}{3}$. 272. $2x - 3y + z - 16 = 0$. 273. $\arccos \frac{1}{9}$. 274. $\arccos \frac{5}{2\sqrt{21}}$. 275. $x - y + 2z = 0$. 279. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}$. 283. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 285. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}$. 290. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}$. 292. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



293. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$. 294. а) 2 при $x = 0$; б) 10 при $x = 0,6$. 310. $x^2 + (y - 5)^2 + (z + 6)^2 = 4$. 316. Нет. 317. а) Нет; в) нет. 322. $x - 2y + 3z + 2 = 0$. 323. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-1}$. 341. 2φ, если $\varphi \leq 45^\circ$, $180^\circ - 2\varphi$, если $\varphi > 45^\circ$. 343. 5. 344. 3. 345. 4. 350. 2. 353. $4x - 3y + z + 3 = 0$. 355. $x + 2y - 5z + 11 = 0$; $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 30$. 357. 3 м. 358. Нет. 361. (-3; 0; -3). 374. Таких поворотов существует огромное количество. 375. (1; 0; 2) или (1; 0; -2). 379. Если n — число четное, то одну. Если данная пирамида — правильный тетраэдр, то 3. 382. Да. 385. 9. 394. 4. 395. Да. 396. Нет. 410. (-3; 5; -4). 411. (-3; 13; 0). 414. $A'(0; 5; 2)$; $B'(-3; 3; 3)$; $C'(-2; 3; 1)$. 415. а) Да; б) нет. 417. Нет. 419. а) Да; б) нет. 420. Не всегда. 429. 30° . 431. Да. 432. Да. 433. $2\sqrt{3}a$. 434. а) (0; 8; -7). 435. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-3}{-3}$. 436. $x + y - 22z + 69 = 0$. 448. а) (-2; 4; -1); б) (4; 12; -3). 449. $(x + 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 14$. 455. Да. 461. Нет, если пирамида не является правильным тетраэдром. 463. Да. 464. Не обязательно. 466. Да. 485. Да. 488. а) $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 9)^2 = 36$; б) $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 6)^2 = 16$. 489. а) $2x + y - 3z + 12 = 0$; б) $2x + y - 3z - 18 = 0$. 492. Да. 493. Нет. 497. а) (10; 0; 20); б) (-8; 0; 20). 501. 16 см^2 . 502. 0,01S, 0,04S ..., 0,81S. 504. Нет. 506. $\sqrt{2} : 1$; пирамиды не подобны. 507. Нет. 508. $\sqrt{\sqrt{5} - 2}$. 520. $8\sqrt{3} \text{ см}$. 523. 15 дм. 524. 5 дм. 525. 2,8 дм. 526. $24\sqrt{3} \text{ м}$. 527. 75° . 528. 120° . 529. 10° . 532. а) $\arccos \frac{3}{4}$; б) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$. 533. 45° . 535. 120° . 538. $\arctg 2$. 539. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. 540. 6 см и 16 см. 541. 22 см. 543. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos \varphi}$. 545. 45° . 564. $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \arccos \frac{1}{3}$. 567. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 568. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. 570. 7 см. 571. $4\sqrt{17} \text{ см}$. 573. $0,5\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$. 574. 14 см. 576. $2\sqrt{5} \text{ см}$. 577. $a\sqrt{3}$. 578. $\arccos \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. 579. α , α и φ , где $\cos \alpha = \text{ctg} \hat{A}$, $\cos \varphi = \text{ctg}^2 \hat{A}$. 581. α , где $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. 582. 15° и 75° . 585. Да. 608. Невыпуклый существует. 630. Шар. 632. а) Сфера; б) шар; тело; в) внутренняя область шара; про-

- странственная область. 633. Тело. 634. Нет. 635. Пространственная область. 636. Существует. 637. 3 см. 638. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 639. $a \leq h \leq a\sqrt{3}$. 641. Да. 644. 1. 645. Нет. 646. Да. 647. $2\sqrt{2}$. 648. а) $a\sqrt{3}$; б) $a\sqrt{3}$. 649. $a\sqrt{6}$. 650. $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leq h \leq a$. 651. $3x + 4z - 28 = 0$. 652. $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y + z = 3$. 665. Тетраэдр. 666. 8. 667. 9. 668. Да. 670. $4\sqrt{3}\text{см}^2$. 671. 6 см. 672. 7 граней, 12 ребер, 7 вершин, a^2 . 673. 18 м^2 . 674. $2\left(S_1 + S_2 + \frac{S_1 S_2}{a^2}\right)$. 678. $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\varphi\right)$, $S \approx 2,3 \text{ м}^2$. 680. Нет. 684. Покажите, что рассматриваемый n -гранник имеет $\frac{3n}{2}$ ребер, а вершин n . 686. Рассматриваемый n -гранник имеет $\frac{3n}{2}$ ребер и $\frac{3n}{4}$ вершин. Далее примените теорему Эйлера. 687. $360^\circ(n - 2)$. 707. а) $d^2 \sin\varphi \cos\varphi$; б) $2\sqrt{2} d^2 \sin\varphi \cos\varphi$. 709. 4 см. 712. $2\sqrt{2} S$. 715. 120° . 716. $2\sqrt{2}$ см. 717. $S = 906 \text{ см}^2$; $S_{\text{сеч}} = 240 \text{ см}^2$. 718. 30° . 719. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{16\cos\alpha}$, $S \approx 92,4 \text{ см}^2$. 720. $\sqrt{3}S$. 721. $\sqrt{3} \tan\frac{\alpha}{2}$. 722. 360 см^2 . 725. $3a^2$. 726. $\frac{\sqrt{3}S}{5}$. 727. $2\sin\frac{\alpha}{2}$. 728. $\frac{6b^2 \cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-2\cos\alpha}}$. 729. а) $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{13})}{2}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}(4+\sqrt{7})}{4}$. 730. $a^2\left(2\sin\alpha + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 731. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3\cos\alpha}\left(\sqrt{4-3\cos^2\alpha} + 1\right)$. 732. $6\sqrt{S_2^2 - S_1^2}$. 733. $\text{arctg}\frac{b\sqrt{2}}{a}$. 734. $\frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha}$, если $\alpha \leq 30^\circ$; $\frac{a^2(2\sqrt{3} - \text{ctg}\alpha)}{\sqrt{3}\sin\alpha}$, если $\alpha > 30^\circ$. 737. $h = 3,9\sqrt{2}$ дм; $d = 7,8\sqrt{2+\sqrt{2}}$ дм. 748. 12 см^2 . 751. 45° . 752. $a^2 + b^2 = c^2$. 753. 6 см; 7 см; 12 см. 755. $a\sqrt{2}$ и $2a$. 756. 9 см и 13 см. 757. $(96 + 15\sqrt{3}) \text{ см}^2$. 758. 30 см^2 . 759. $\text{arctg}2$. 760. $13\sqrt{2}$ см и 26 см. 762. 10 см^2 . 764. а) Нет; б) нет. 767. Нет. 768. $5\sqrt{13}$ см. Воспользуйтесь раз-



- верткой призмы. 769. $2d^2 \sin \alpha (\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} + \sin \beta)$.
770. $\arccos(\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta})$. 771. $\frac{2l^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}}$. 772. $96\sqrt{10} \text{ см}^2$.
773. 336 см^2 . 774. а) 16 см^2 ; б) $4\sqrt{13} \text{ см}^2$. 775. $4\sqrt{2} \text{ см}^2$ и $12\sqrt{2} \text{ см}^2$.
776. $a\sqrt{3}$. 777. 560 см^2 . 778. $\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$. 779. $\frac{16(10\sqrt{3}+9)}{3} \text{ см}^2$.
782. $d_1 = a\sqrt{6}$; $d_2 = d_3 = d_4 = a\sqrt{2}$. 783. $8r^2 + \frac{\sigma}{2}$. 798. 24 см .
799. $2(3 + \sqrt{3})$. 800. а) $128\sqrt{3} \text{ см}$. 801. а) $a^2\sqrt{3}$; б) $\frac{4\sqrt{3}l^2}{3}$;
- в) $\frac{3\sqrt{3}h^2}{2}$. 803. а) $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\cos\alpha)}{4\cos\alpha}$; б) $3\sqrt{3}h^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;
- в) $\frac{3\sqrt{3}b^2 \cos \beta}{4} (\sqrt{4-3\cos^2 \beta} + \cos \beta)$; г) $\frac{6\sqrt{3}d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$;
- д) $\frac{3\sqrt{3}l^2 (\sqrt{4-3\cos^2 \beta} + \cos \beta)}{4\sin^2 \beta \cos \beta}$. 804. $60\sqrt{2} \text{ см}^2$. 805. $\frac{3a^2\sqrt{4-\cos^2 \alpha}}{2\cos \alpha}$;
- $S \approx 194,5 \text{ см}^2$. 806. $\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2\cos \alpha}$. 807. $\frac{a \sin \beta}{2\cos \frac{\alpha}{2}}$. 809. $4\sqrt{3} \text{ см}$. 810. 30° .
811. $ah + a\sqrt{a^2 + h^2}$. 812. $\frac{a^2(2+\sqrt{7})}{2}$. 813. a^2 . 815. $\frac{a^2}{2\cos^2 \alpha} (\sin 2\alpha +$
- $+\sin \beta)$. 816. $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sin \alpha)}{8\cos \alpha}$. 817. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$. 818. $\frac{a \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi}{2\cos^2 \frac{\gamma}{2}}$
819. $\frac{2\sqrt{3}d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{3\sin 2\alpha}$. 820. $\frac{\sqrt{2}}{2} l^2 \cos \alpha \sqrt{1+\cos^2 \alpha}$. 821. 7 см . 822. 75 см^2 .
825. $50\sqrt{7} \text{ см}$. 826. $3a^2(\sqrt{2} + 1)$. 827. 2 см . 828. 30° ; 60° ; 120° ;
- 60° . 829. $-\frac{2h^2 \cos \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$. 830. $\frac{7}{15}$. 832. $2\sqrt{2} \text{ см}$. 833. 4 см^2 .
834. $\frac{l^2}{2} (6 + \sqrt{7} + 3\sqrt{3})$. 836. 3 см ; $\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$. 837. $a^2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.
839. $\frac{a(2\sqrt{3}-3)}{3}$. 840. $\frac{9a^2}{2\sqrt{1-2\cos \alpha}}$. 841. $\arccos \frac{\sqrt{2n^2-m^2}}{m}$.

842. $\sqrt{\frac{9m^2 - 4\sqrt{3}Q}{3}}$. 843. $6\sqrt{3}$ см². 844. $\frac{16}{25}$. 845. $\frac{3a^2\sqrt{72\cos^2\alpha + 3}}{16\cos\alpha}$.
848. Может. 862. 1 : $\sqrt{2}$. 863. Да. 864. а) Нет; б) да; в) нет.
868. $\arccos\frac{1}{3}$; 90°. 869. $\sqrt{2}$ дм. 870. 16 см² и $8\sqrt{2}$ см².
872. $\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{6}}$. 874. а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\pi - \arccos\frac{1}{3}$. 879. $a^2\sqrt{3}$. 880. $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.
882. $3m^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$. 885. $a\sqrt{2}$. 886. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; $a\sqrt{2}$. 893. $\frac{5a^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$.
913. $10\sqrt{2}\pi$ см; $20\sqrt{2}\pi$ см. 923. 0; $3\pi a$; πa . 924. $\pi \operatorname{tg}\alpha$.
925. а) $2\sqrt{2}$ см; 16 см²; б) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ см; $\frac{64}{3}$ см². 944. $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ см и
- 1,5 $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ см. 945. $\frac{Q}{4\pi}$. 946. $2\pi r^2 \operatorname{tg}\alpha$. 947. $\frac{1}{2}\pi d^2(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2})$. 950. rh .
953. $\frac{\pi d^2 \sin 2\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. 954. $\sqrt{19}$ см или 1 см. 956. $\approx 3,5$ м². 957. Нет.
960. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. 961. $\frac{50}{3}\pi$ см². 962. а) $10\pi\sqrt{195}$ см²; б) $10\pi\sqrt{147}$ см².
963. 160 см² или 72 см². 964. 290π см² или 528π см².
965. $\sqrt{2}$ см; $\operatorname{arctg}\sqrt{35}$. 966. $\frac{a}{2}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. 967. 24π см².
968. $0,5\pi a^2\sqrt{2}$. 969. $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. 970. $\sqrt{d^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha}$.
974. $\frac{R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$. 984. 60°. 985. $8\sqrt{3}$ см². 986. $\operatorname{arctg}0,5$.
987. а) $2\arcsin\frac{1}{4}$; б) 60°; в) $2\arcsin\frac{3}{4}$. 988. ≈ 23 м². 989. 4 дм;
- 36 дм²; $\arcsin 0,8$. 990. $\frac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos\alpha}$. 992. $\pi a^2(2 + \sqrt{2})$. 993. а) 80 π см²;
- б) 36 π см²; в) 60 π см². 998. $\frac{\sqrt{2}}{2}h$. 999. $\frac{\pi a^2 \sin\alpha}{(1 - \cos\alpha)^2}$. 1000. $\frac{4\pi}{\pi^2 - 1}$.
1001. 500 см². 1002. $\sqrt{\frac{S\sin^2\beta}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. 1003. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1004. $\frac{Q\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi - \operatorname{ctg}^2\alpha}}{\pi\sin\alpha\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}$. 1005. $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. 1006. $\sqrt{15}:\sqrt{7}$. 1007. $\pi l^2\cos\alpha \times$
 $\times (3 + 5\cos\alpha)$. 1008. $\pi l^2\sin\alpha$. 1009. $\arccos\frac{b-a}{c}$. 1010. $2\sqrt{3}\pi a^2$.
 1011. $84\sqrt{3}\pi$. 1012. 300π . 1013. $\frac{\pi h^2\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha\sin\beta}(\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta)$.
 1014. $-\frac{l\sin\alpha\sin 2\alpha\sin\varphi}{\cos 2\alpha+\cos 2\varphi}$. 1015. $2\arcsin\left(\frac{\alpha+\beta}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{\alpha+\beta}\right)$. 1029. 10 см
 и 24 см. 1030. $64\pi\text{ см}^2$. 1032. 10 см или 70 см. 1033. 10 см.
 1035. $\frac{\pi r}{3}$. 1036. $S = \pi(4 - x^2)$. 1038. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ см. 1039. 24 см.
 1040. 6 см. 1041. 288 см^2 ; 96 см. 1043. $\frac{8}{3}$ см. 1044. 8; $(x-2)^2 +$
 $+(y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$. 1045. а) Две плоскости, параллельные
 данной плоскости; б) сфера радиуса r . 1048. Киев ≈ 26 тыс. км.
 1049. Расстояния равны. 1050. $O(8; 4; 2)$, $R = \sqrt{53}$. 1051. Ка-
 саются. 1052. $\frac{9-4\sin^2\alpha}{9}$. 1053. $4\sqrt{7}$ см. 1054. $6\sqrt{5}$ см.
 1055. $4\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ см. 1057. Сфера радиуса $r\sqrt{3}$ с центром O ,
 где r и O — радиус и центр данной сферы. 1059. $\frac{r}{3}(5 \pm \sqrt{13})$.
 1060. $(1 + \sqrt{15})r$. 1061. $1,5r$. 1079. $3\sqrt{3}\pi$ см. 1081. $r^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} \approx 22\text{ м}^2$.
 1082. 144 см^2 . 1083. $4\sqrt{3}$ см. 1085. $4\sqrt{13}$ см или $6\sqrt{13}$ см.
 1087. $32\pi\text{ см}^2$. 1088. $\frac{\pi a^2}{4\sin^2 2\alpha\cos\beta}$. 1089. $\frac{\pi c^2\operatorname{ctg}\varphi}{\sin(\alpha+\beta)}$.
 1090. $r\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$. 1091. а) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 1092. $\frac{a^2}{4}(11 + 3\sqrt{5})$.
 1093. 30° . 1094. $\frac{\sqrt{6}}{6}a; \frac{\sqrt{2}}{2}a; \frac{a}{2}$. 1095. $3rP$. 1096. $\sqrt{Rr}$.
 1097. $\pi - \arccos\frac{1}{15}$. 1098. $\frac{R}{2}$. 1099. $\frac{\sqrt{2}RH}{H+\sqrt{2}R}$. 1101. $\frac{4\pi m^2}{\cos\alpha(4+\operatorname{tg}^2\alpha)}$.
 1102. $\frac{2\pi c^2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\varphi}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$. 1103. $2\pi Rr : (R \pm r)$. 1104. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

1105. 1, 2. 1106. 45° . 1107. $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$. 1108. $a(2-\sqrt{2})$. 1109. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
1121. 1,95 дм³. 1122. 17500 м³. 1123. а) $\sqrt{Q^3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{9}d^3$.
1124. 392 см³. 1125. $\sqrt[6]{27V^2}$. 1126. $\frac{1}{4}d^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$; ≈ 6 дм³.
1127. 9 см. 1129. 30 дм. 1130. 6 см. 1134. $abt\alpha\sqrt{a^2+b^2}$.
1135. 19 дм³. 1140. $20\sqrt{11}$ см³. 1144. $V:6$. 1145. $\frac{1}{6}$ дм³. 1146. $\frac{a^3}{3}$.
1158. $\frac{\sqrt{3}}{4}d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$. 1163. $4ar^2$. 1165. 672 см². 1166. 750 м³.
1167. 39 000 м³. 1168. $\frac{\pi}{4}d^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$. 1172. 180π см³. 1176. 4 : 9.
1188. $\frac{5}{4}a^3 \operatorname{tg} 54^\circ$. 1194. а) $\frac{\pi}{8}h^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi$; б) $\frac{1}{2}r^2 h\alpha$, α – радианная мера угла. 1199. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi r^3}{9}$. 1210. $Q/\sin \alpha$. 1211. 168 дм³. 1212. $a^3 : \sqrt{2}$.
1217. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3 \sin \alpha$. 1220. $10\,530\sqrt{2}$ см³. 1222. 672 см³. 1230. Секущая плоскость проходит через точку, которая делит сторону основания призмы в отношении 1 : 2. 1233. $\pi^2 l$. 1248. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.
1252. а) $\frac{2}{3}b^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$; б) $\frac{2}{3}b^3 \cos \beta \sin^2 \beta$; в) $\frac{4}{3}b^3 \cos^2 \gamma \sqrt{-\cos 2\gamma}$.
1254. $\frac{a^3}{16}$. 1255. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$. 1256. 112 см³. 1258. а) $\frac{b^3}{3} \sin^2 \alpha \sqrt{3-4\sin^2 \alpha}$.
1261. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$. 1262. $\frac{5a^3}{6}$. 1263. 1 : ($\sqrt[3]{2} - 1$). 1264. 1 день.
1265. Нет. 1269. $\frac{ab}{12} \sqrt{3a^2 - b^2}$. 1274. 10. 1278. $\frac{a^2 h}{6}$.
1279. $\frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$. 1280. 3 : 5.
1281. $\frac{1}{3}r^3 \sin 2\alpha \sin \alpha$. 1282. $\sin \alpha = (\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a}) : (\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a})$.
1285. $(1+\sqrt{2})V^{\frac{2}{3}}$. 1295. $\frac{1}{3}\pi^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$. 1296. 6 см. 1297. 8π м³.
1298. В 8 раз. 1305. $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см. 1308. $\frac{2}{3}\pi r^3 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha$.



1439. $\frac{5}{3}\pi a^2$ и $\frac{35}{9}\pi a^2$. 1441. 148π см². 1446. $\left(\frac{S}{4\pi} + aM\right) : (a+M)$ и

$\left(\frac{S}{4\pi} - aM\right) : (a-M)$, где $M^2 = \frac{S}{2} - r^2 - a^2$. 1450. Да. 1451. Напри-

мер, симметричный многогранник, составленный из семи

равных кубов. 1452. Воспользуйтесь теоремой Эйлера.

1454. $\frac{2\sqrt{3}}{3}ah$. 1455. 45° . 1457. $5\sqrt{2}$ см. 1458. 12 см. 1459. 60° .

1460. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 1461. Правильный шестиугольник. 1464. 1 дм.

1465. $108^\circ < \varphi < 180^\circ$. 1466. $\frac{a}{18}\sqrt{315-12\sqrt{42}}$. 1467. $\frac{abc}{ab+ac+bc}$.

1469. $\frac{SQ}{(\sqrt{S}+\sqrt{Q})^2}$, где S и Q — площади оснований. 1472. 5 см.

1474. Сфера. 1475. 5, 6, 7 или 8. 1476. Прямая или вся плос-

кость, или пустое множество. 1479. Сфера, часть сферы или

точка. 1481. $\frac{a\sqrt{6}}{8}$. 1483. M — точка на сфере такая,

что векторы $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ противоположно направленные

или сонаправленные. O — центр сферы. 1484. $15r^2$. 1485. $40r^2$.

1486. $128r^2$. 1487. $(11 - \sqrt{19})$ см. 1488. Такой призмой является

куб. 1489. $\frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$. 1490. Секущая плоскость должна проходить

через центр симметрии параллелепипеда. 1491. $\frac{1}{3}$ куб. ед.

1493. 306 см³. 1495. $20\sqrt{3}$ см³. Опишите вокруг данной

пирамиды параллелепипед, диагонали противоположных гра-

ней которого — AB и CD . 1496. $\frac{m_1 m_2 m_3}{(m_1 + n_1)(m_2 + n_2)(m_3 + n_3)}$.

Докажите, что объемы двух тетраэдров с равными трех-

гранными углами относятся как произведения ребер, которые образуют эти трехгранные углы. 1497. $1 : 18$. Воспользуйтесь

формулой объема пирамиды. 1502. $\frac{a}{2}$. 1505. $\frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{6 \cos^2 2\alpha}$.

1506. $\frac{1}{4}n^2(2-n)$, где $0 < n < 2$. 1508. 60° . 1509. $\frac{3\sqrt{3}+5}{\pi}$.



1512. $r\sqrt[3]{15}$. 1513. ≈ 62 кг. Объемы подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров. 1514. ≈ 100 м. 1521. Если прямая GO пересекает описанную вокруг тетраэдра $ABCD$ сферу в точках P и P_1 (рис. 294), то хорда PP_1 , как и DD_1 , проходит через центроид G , поэтому $DG \cdot GD_1 = PG \cdot GP_1$. Но $PG \cdot GP_1 = (R - GO)(R + GO) = R^2 - GO^2$, $DG \cdot GD_1 = DG \times (DD_1 - DG) = DG \cdot DD_1 - DG^2$. Следовательно, $DG \cdot DD_1 = DG^2 + R^2 - GO^2$. Далее выразите DG^2 и $R^2 - GO^2$ через ребра данного тетраэдра. 1522. Используйте соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим чисел

$\frac{1}{h_A}, \frac{1}{h_B}, \frac{1}{h_C}, \frac{1}{h_D}$. 1525. Если I — центр вписанного в тетраэдр

$ABCD$ шара, T_A и T_B — точки касания его к граням BCD и ACD , то $IT_A \perp CD$ и $IT_B \perp CD$. Следовательно, плоскость $IT_A T_B$ перпендикулярна к CD (рис. 277). Обозначим буквой M точку пересечения этой плоскости с CD . Тогда $MT_A = MT_B$. Получается, что если наложить грань ACD на BCD , то точки T_A и T_B совпадут. Аналогично можно доказать, что точки T_C, T_D также совпадут с T_A , если грани ABD и ABC наложить на BCD , повернув их вокруг BD и BC . Вторая часть утверждения следует из того, что все отрезки касательных, проведенных к шару из одной точки, одинаковы по длине. 1527. Из равен-

ства п. 4 §37 следует, что $\frac{1}{r_A} = \frac{-S_A}{3V} + \frac{S_B}{3V} + \frac{S_C}{3V} + \frac{S_D}{3V} = -\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}$ и т. д. 1528. Воспользуйтесь результатом

предыдущей задачи. 1530. Пусть полувписанная сфера с центром Ω касается ребер тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M, N, E, F . Если O_A, O_B, O_C, O_D — центры кругов, вписанных в грани

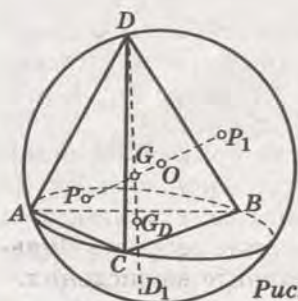


Рис. 294

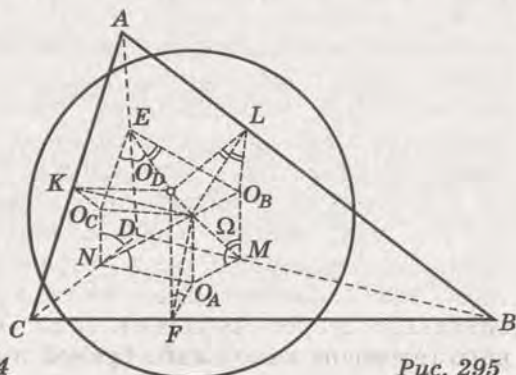


Рис. 295

данного тетраэдра (рис. 295), то $\Delta\Omega O_A M = \Delta\Omega O_A N = \Delta\Omega O_A F$.
 $\Delta\Omega O_B L = \Delta\Omega O_B M = \Delta\Omega O_B E$ и т. д. Пусть $\widehat{\Omega N O_A} = \widehat{\Omega M O_A} =$
 $= \widehat{\Omega F O_A} = \alpha$, $\widehat{\Omega M O_B} = \widehat{\Omega L O_B} = \widehat{\Omega E O_B} = \beta$, $\widehat{\Omega N O_C} = \widehat{\Omega K O_C} = \widehat{\Omega E O_C} = \gamma$,
 $\widehat{\Omega F O_D} = \widehat{\Omega K O_D} = \widehat{\Omega L O_D} = \delta$. Тогда $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, $\widehat{AC} +$
 $+ \widehat{BD} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, $\widehat{AD} + \widehat{BC} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Следовательно,
 $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = \widehat{AD} + \widehat{BC}$. 1531. Обратите внимание на
 то, что вследствие поворота данного тетраэдра на 180° вокруг
 его средней линии образуется тетраэдр, который накладывается
 сам на себя. 1532. Покажите сначала, что объем равногранно-
 го тетраэдра можно вычислять по формуле $V = \frac{2}{3a} \cdot S^2 \sin \alpha$.

1533. Используйте теорему косинусов для произвольного
 тетраэдра. 1535. а) Из теоремы косинусов для равногранного
 тетраэдра следует, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$. Используйте со-
 отношение между средним арифметическим и средним геомет-
 рическим чисел $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$; г) используйте формулы
 теоремы косинусов для трехгранного угла; д) учтите, что в
 равногранном тетраэдре все трехгранные углы равны между
 собой, а противоположные двугранные углы также одинаковы.
 1536. Радиусы вневписанных шаров любого тетраэдра можно
 определить по формулам. В равногранном тетраэдре площади

всех граней равны между собой, поэтому $r_A = r_B = r_C = r_D = \frac{3V}{2S}$.

Но $\frac{3V}{2S} = \frac{Sh}{2S} = \frac{h}{2S} = 2r$, поэтому $r_A = r_B = r_C = r_D = 2r$. 1537. В равно-
 гранном тетраэдре центр описанного шара O и центроид G со-
 впадают, поэтому $R^2 = \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$. Следует учесть
 еще соотношение $n_a^2 + n_b^2 + n_c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$.

1538. Покажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D} \geq 4\sqrt{\frac{1}{h_A} \cdot \frac{1}{h_B} \cdot \frac{1}{h_C} \cdot \frac{1}{h_D}}$.

1539. Обратите внимание на то, что диаметр вписанного в
 равногранный тетраэдр шара равен половине высоты этого
 тетраэдра. 1540. Центр O вписанного в равногранный тетраэдр
 шара совпадает с его центроидом G . Поэтому для каждой точ-
 ки X , взятой на поверхности этого шара, сумма $XA^2 + XB^2 +$
 $+ XC^2 + XD^2$ имеет одно и то же значение (теорема Лейбница).
 1541. Сформулированное в задаче утверждение следует из
 того, что в равногранном тетраэдре центры вписанных и
 описанных шаров совпадают. 1542. Обозначьте ребро правиль-
 ного тетраэдра какой-либо буквой и выполните вычисления.



СОДЕРЖАНИЕ

<i>Предисловие</i>	3
------------------------------	---

Раздел 1. Координаты, геометрические преобразования и векторы в пространстве	5
---	---

§ 1. Прямоугольная система координат	6
§ 2. Деление отрезка в заданном отношении.	12
§ 3. Уравнение сферы, плоскости и прямой	18
§ 4. Применение координат	25
§ 5. Векторы в пространстве	31
§ 6. Действия над векторами	38
§ 7. Скалярное произведение векторов. Угол между векто- рами	45
§ 8. Применение векторов	53
§ 9. Геометрические преобразования в пространстве. Движения	61
§ 10. Симметрия относительно плоскости	67
§ 11. Поворот и симметрия относительно прямой	73
§ 12. Параллельный перенос	78
§ 13. Композиции движений и равенство фигур	84
§ 14. Гомотетия и преобразование подобия	90
<i>Задачи по готовым рисункам.</i>	98
<i>Тестовые задания.</i>	100
<i>Типовые задачи для контрольной работы</i>	101
<i>Главное в разделе 1.</i>	102

Раздел 2. Многогранные углы. Многогранники	104
---	-----

§ 15. Двугранные углы	105
§ 16. Трехгранные углы	112
§ 17. Многогранные углы	119
§ 18. Геометрические тела.	124
§ 19. Многогранники	129
§ 20. Призмы	136
§ 21. Параллелепипеды	144
§ 22. Пирамиды и усеченные пирамиды	152
§ 23. Правильные многогранники.	164
<i>Задачи по готовым рисункам</i>	171
<i>Тестовые задания.</i>	173

Типовые задачи для контрольной работы	174
Главное в разделе 2	175

Раздел 3. Тела вращения 178

§ 24. Тела и поверхности вращения	179
§ 25. Цилиндр	184
§ 26. Конус и усеченный конус.	191
§ 27. Шар и сфера	200
§ 28. Комбинации тел	208
Задачи по готовым рисункам.	216
Тестовые задания.	218
Типовые задачи для контрольной работы	219
Главное в разделе 3.	220

Раздел 4. Объемы и площади поверхностей геометрических тел. 222

§ 29. Понятие объема	223
§ 30. Объем прямой призмы и цилиндра	229
§ 31. Вычисление объемов тел с помощью интеграла	236
§ 32. Объем пирамиды и усеченной пирамиды	242
§ 33. Объем конуса и усеченного конуса	249
§ 34. Объем шара и его частей	255
§ 35. Теорема Гульдина	261
§ 36. Площади поверхностей	266
Задачи по готовым рисункам.	274
Тестовые задания.	276
Типовые задачи для контрольной работы	277
Главное в разделе 4.	278

Задачи для повторения	279
Вопросы и задания для повторения	284

Приложения. Элементы геометрии тетраэдра 286

§ 37. Тетраэдр и шар	287
§ 38. Равногранные тетраэдры	293
Исторический очерк	302
Темы для научных исследований	309
Дополнительная литература	310
Справочный материал	311
Предметный указатель	319
Ответы	322

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна
ВЛАДІМІРОВ Володимир Миколайович

ГЕОМЕТРІЯ

**Підручник для 11 класу загальноосвітніх
навчальних закладів**

Академічний рівень, профільний рівень

*Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Переклад з української

Редактор *Н. Дашко*
Обкладинка, ілюстрації *В. Марущинця*
Макет *С. Железняк*
Художній редактор *В. Марущинець*
Технічний редактор *Ц. Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *О. Білохвост, Л. Ємець*
Коректори *І. Іванюсь, Л. Леуська*

Формат 60×90/16.

Умовн. друк. арк. 21,0. Обл.-вид. арк. 20,78.

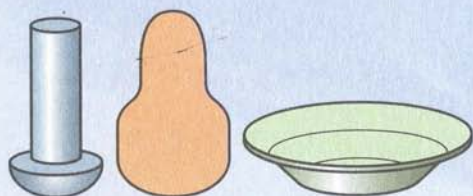
Тираж 44020 пр. Вид. № 1135.

Зам. № 11-0190.

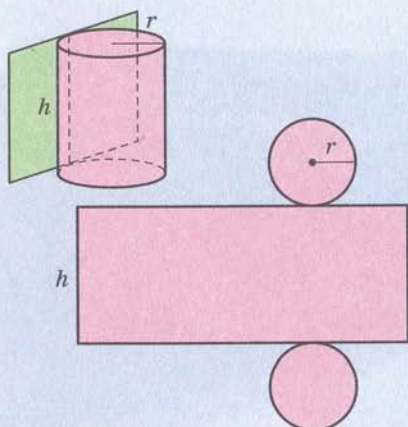
Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців серія
ДК № 3966 від 01.02.2011.

Віддруковано з готових позитивів у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців серія ДК № 3179 від 08.05.2008.

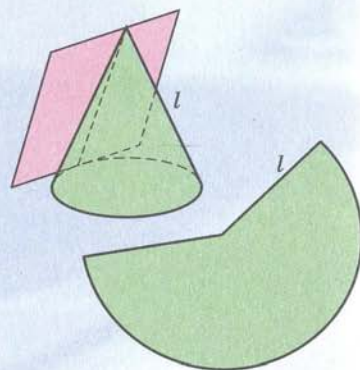
Тела вращения



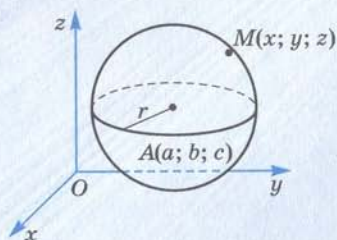
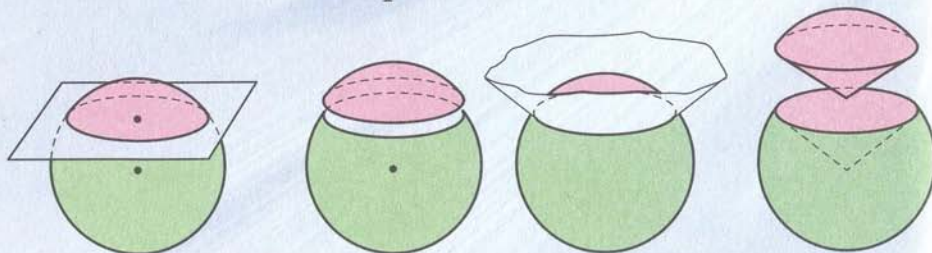
Цилиндр



Конус



Шар и его части

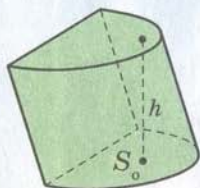


Уравнение сферы

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

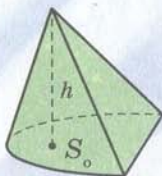
Объемы и площади поверхностей тел

22,00



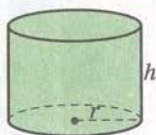
$$V = S_0 \cdot h$$

$$S = 2S_0 + S_6$$



$$V = \frac{1}{3} S_0 h$$

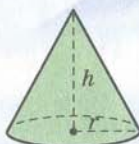
$$S = S_0 + S_6$$



$$V = \pi r^2 h$$

$$S_6 = 2\pi r h$$

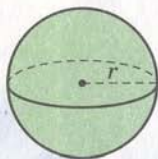
$$S_{\pi} = 2\pi r(r + h)$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

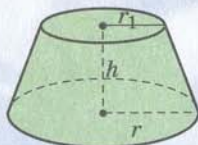
$$S_6 = \pi r l$$

$$S_{\pi} = \pi r(r + l)$$

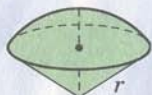


$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

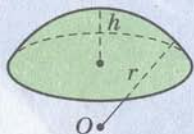
$$S = 4\pi r^2$$



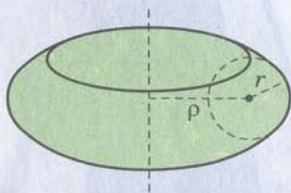
$$V = \frac{\pi}{3} h(r^2 + rr_1 + r_1^2)$$



$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$



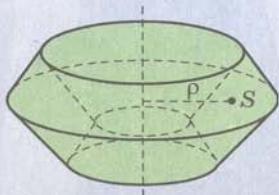
$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$$



Тор

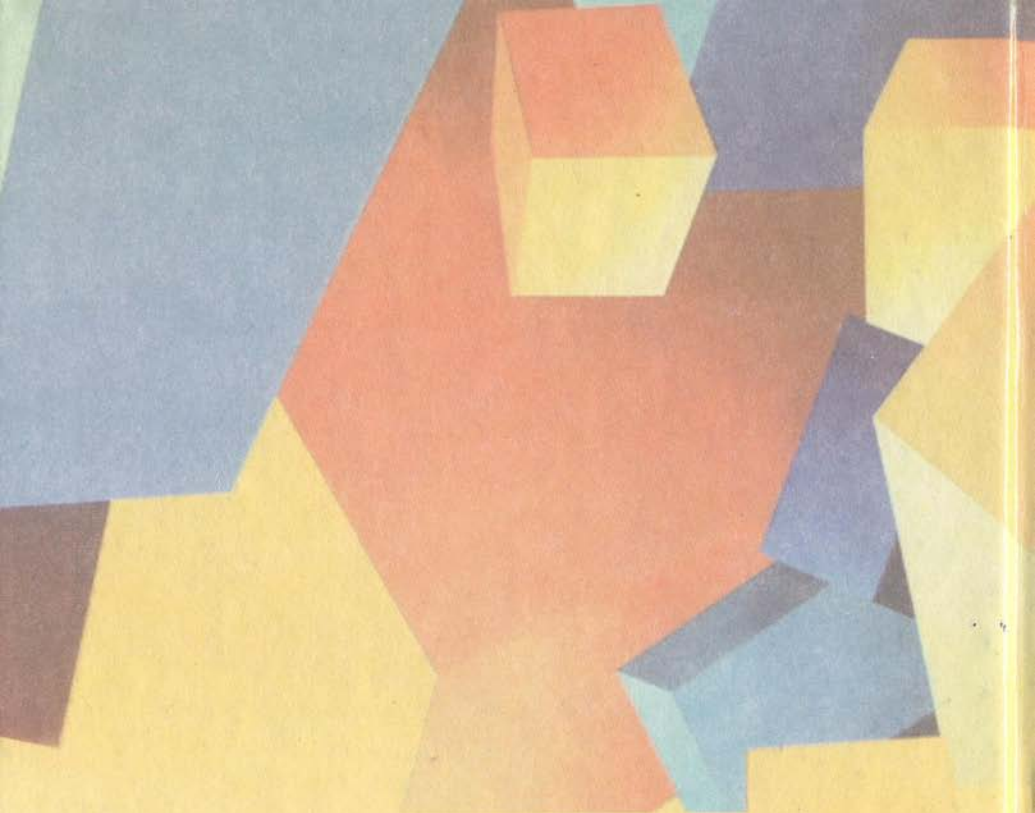
$$V = 2\pi^2 R r^2$$

$$S = 4\pi^2 R r$$



Теорема Гульдина

$$V = 2\pi p S$$



Учебно-методический комплект «Геометрия–11»
создан в соответствии с действующей программой
с учетом современных тенденций развития
школьного образования.
Он состоит из учебника, книги для учителя
и дидактических материалов.

ISBN 978-966-11-0090-8



9 789661 100908 >